

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Ульяновский государственный технический университет

К.С. Горшков, В.В. Филаретов

**СХЕМНЫЙ ПОДХОД
ВИЛЬГЕЛЬМА ФОЙСНЕРА
И МЕТОД СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ**

Под редакцией В. В. Филаретова

УЛЬЯНОВСК
2009

УДК 621.3.01
ББК 31.2
Г 71

Рецензенты:

кафедра ТОЭ Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета (ЛЭТИ) им. В. И. Ульянова (Ленина) (заведующий кафедрой доктор технических наук, профессор Е. Б. Соловьева)

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой автоматики и электротехники Санкт-Петербургского архитектурно-строительного университета А.В. Бондаренко.

УДК 621.3.01

Горшков, К.С.

Схемный подход Вильгельма Фойснера и метод схемных определителей / К.С. Горшков, В.В. Филаретов ; под ред. В. В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – 189 с.

Представлено исследование развития схемного подхода к анализу и синтезу электрических цепей от пионерских работ В. Фойснера до новейших достижений. Приведена краткая биография В.Фойснера, установлен его приоритет в открытии целого ряда важных положений современной теории электрических цепей. Излагаются основы метода схемных определителей, базирующегося на формулах выделения параметров. Метод предназначен для получения оптимальных по сложности символьных выражений схемных функций, откликов, погрешностей преобразования и допусков элементов, а также параметров макромоделей подсхем и параметров неизвестных элементов в линейных электрических цепях. Используется непосредственно схема замещения цепи с произвольными линейными элементами, минуя составление уравнений равновесия.

Рассмотрены приложения метода схемных определителей для решения задач символьного анализа сложных электрических цепей по частям и с произвольным числом воздействий, аналитического решения систем линейных алгебраических уравнений, символьного анализа электронных цепей с переключаемыми конденсаторами, реализации структурных схем электрических цепей на основе транскондуктивных усилителей, структурного синтеза электрических цепей по их символьным и полиномиальным схемным функциям.

Для специалистов в области схемотехники аналоговых электрических цепей, магистрантов и аспирантов соответствующих направлений и специальностей.

Печатается в авторской редакции.

ISBN 978–5–9795–0510–7

© Горшков К.С., Филаретов В.В. 2009
© Оформление. УлГТУ, 2009



ФРИДРИХ ВИЛЬГЕЛЬМ ФОЙСНЕР (1843–1928)

FRIEDRICH WILHELM FEUSSNER (1843–1928)

Оглавление

Особое звено символьного анализа электрических цепей	6
The symbolic networks analysis particular link	10
Глава 1. Жизнь и деятельность Вильгельма Фойснера, основоположника схемного подхода к анализу цепей	12
1.1. Вехи научной деятельности	12
1.2. Метод выделения параметров	16
1.3. Перечисление деревьев графа	17
1.4. Диакоптика Фойснера	18
1.5. Методы разложения схемных определителей	18
1.6. Топологическая формула передачи	20
1.7. Полная схема и оригинальное доказательство формулы Кэли	21
1.8. Топологическое доказательство принципа взаимности	22
1.9. Обобщенный метод контурных токов	23
Глава 2. Символьный анализ электрических цепей: возвращение к схемному подходу	25
2.1. Установление приоритета Фойснера	25
2.2. Тернистый путь развития символьного анализа: теоретико-множественный, матричный, графовый подходы	26
2.3. Эволюция методов символьно-топологического анализа	30
2.4. Попытки развития схемного подхода Фойснера	41
Глава 3. Основы метода схемных определителей	54
3.1. Факторизация (свертка) алгебраических выражений	54
3.2. Формирование оптимальных выражений схемных определителей пассивных цепей	56
3.3. Метод схемных определителей	63
3.4. Схемные выражения для схемных функций	67
3.5. Общий алгоритм разложения схемного определителя	68
3.6. Формирование полиномиальных схемных функций	76
3.7. Формирование дробных выражений схемных функций и их применение для допускового анализа	87
3.8. Обобщения формул выделения	97
Глава 4. Развитие метода схемных определителей топологических преобразований электрических цепей	103
4.1. Схемно-алгебраические доказательства	103
4.2. Неявный принцип наложения	108
4.3. Методы схемной диакоптики	111
4.4. Решение базисной задачи диагностики	122
4.5. Раскрытие матричных определителей	126
4.6. Реализация структурных схем электрических цепей	131
4.7. Синтез электрических цепей по схемным функциям	135
4.8. Преобразование переключением активных элементов	147
4.9. Программные средства на основе схемного подхода	155
Заключение	164
Именной указатель	165
Предметный указатель	166
Библиографический список	167

Contents

The symbolic networks analysis particular link	6
The symbolic networks analysis particular link	10
Part 1. Life and scientific efforts of the founder of the network approach to the analysis of circuits, Wilhelm Feussner	12
1.1. The marks of scientific efforts	12
1.2. The parameter extraction method	16
1.3. The enumeration of graph trees	17
1.4. The diacoptic method of Feussner	18
1.5. The network determinants decomposition methods	18
1.6. The topological transfer formula	20
1.7. The application of the complete network as a pattern	21
1.8. Topological proof of reciprocity principle	22
1.9. Generalized method of loop currents	23
Part 2. Symbolic analysis of electronic circuits: returning to the network approach	25
2.1. Confirmation of priority of Feussner	25
2.2. The thorny path of the symbolic analysis development: theoretical-multiple, matrix and graph approaches	26
2.3. Evolution of methods of the symbolic-topological analysis	30
2.4. The attempts of development of networks approach of Feussner	41
Part 3. The foundation of method of circuit determinants	54
3.1. Factorization of algebraic expressions	54
3.2. Formation of the optimal expressions of the circuit determinants of passive networks	56
3.3. The method of circuit determinants	63
3.4. Circuit expressions for the network functions	67
3.5. A general algorithm of circuit determinants decomposition	68
3.6. Formation of polynomial circuit functions	76
3.7. Formation of fractional expressions of the circuit functions and its application for tolerance analyzes	87
3.8. Generalizations of the extractions formulas	97
Part 4. The applications of the method of circuit determinants	103
4.1. The circuit-algebraic proofs of the topological transformations of the electronic networks	103
4.2. The implicit principle of syncopation	108
4.3. The circuit diacoptic methods	111
4.5. The solution of a basic task of diagnostics	122
4.6. The obtaining of matrix determinants	126
4.7. The realization of block-diagrams of electronic networks	131
4.8. The structure synthesis of electric networks by circuit functions	135
4.8. The switching of the active elements	147
4.9. The software on the basis of the network approach	155
Conclusion	164
Bibliography	165
Index	166
References	167

Прием, который ожидает в научном мире ту или иную работу, зависит не только от ценности ее содержания.

Норберт Винер (1984–1964)

Особое звено символьного анализа электрических цепей

Одним из элементов этики ученого является стремление воздать должное своим коллегам-предшественникам, что обеспечивает преемственность в науке и служит стимулом к выполнению более качественных, приоритетных исследований. Народная мудрость «все новое – это хорошо забытое старое» применительно к науке означает: от глубокого изучения классических работ – один шаг к новому результату.

Следует признать, что привычка «не читать чужие работы» является характерной для части научных сотрудников и иногда даже составляет предмет своеобразной гордости. Однако такой «ореол первооткрывателя» – это как игра в лотерею. Как правило, всегда находится пытливейший исследователь, который установит факт отсутствия приоритета на тот или иной результат у автора более поздней работы. Повторение уже известных результатов в науке равносильно достижению спортивных результатов прошлых лет. Но, в отличие от естественного роста спортивного мастерства, увеличение числа избыточных публикаций – явление далеко не безобидное с точки зрения затрат интеллектуального труда.

Символьный анализ как раздел теории электрических цепей полтора века привлекает внимание специалистов. Под символьным анализом электрической цепи обычно понимается формирование ее символьной схемной функции (ССФ) [99, 229, 236]. За последние полтора века этому вопросу были посвящены тысячи журнальных статей, сотни диссертаций и десятки монографий. Неисчерпаемость данной тематики во многом обуславливается бесплодным поиском ответа на вопрос о предпочтительности того или иного метода. Трудности усугубляются тем, что многие из публикаций дублируют друг друга, используют различный понятийный аппарат, игнорируя терминологию предшествующих работ [99], бездоказательно декларируют преимущества тех или иных методов и алгоритмов.

Как следствие, это привело к тому, что специалисты почти девяносто лет искали метод, который является «особым звеном» символьного анализа, позволяющим «удержать цепь» [213] ожиданий электро- и радиоинженеров. Какие же результаты явились тем «особым звеном», которое не нашли и за которое не ухватились «всеми силами» специалисты в области символьного анализа, чтобы «подготовить прочно переход к

следующему звену», то есть обобщению для активных электрических цепей?

На наш взгляд, такими результатами могли бы стать четыре формулы Вильгельма Фридриха Фойснера [31, 32, 34, 36], немецкого ученого, получившего признание в области физики [27–30, 33, 35, 37, 38]. Фойснер представлен несколькими предложениями в энциклопедии «Интеллектуальная мастерская природы. Теоретическая физика от Ома до Эйнштейна» [57]. Вместе с тем упомянутые работы Фойснера как электротехника были недостаточно глубоко и внимательно изучены учеными двадцатого века.

Вильгельм Фойснер полвека отдал Марбургскому Университету. Деканат Физики Марбургского Университета может по праву гордиться большим числом всемирно известных ученых, которые занимались исследованиями в области физики или преподавали эту дисциплину в Марбурге. Среди них и Дени Папен, и Михайло Ломоносов (рис. В.1), и Джон Тиндаль, и Карл Фердинанд Браун, и Альфред Лотар Вегенер, Отто Ган, и многие другие. Краткая история Деканата Физики изложена в работе [86]. Однако в ходе поиска информации о Фойснере и его достижениях, мы с удивлением обнаружили, что в наше время его имя оказалось практически неизвестным среди ученых Германии.



Рис. В.1. Михайло Ломоносов [104]

Fig. В.1. Michael Lomonosov [104]

Можно говорить о том, что важные научные достижения Вильгельма Фойснера практически неизвестны ученым наших дней. Особенно это касается результатов его исследований в области электротехники [31, 32, 34, 36]. Еще более удивителен тот факт, что недооцененной остается роль Фойснера в становлении физики как самостоятельной научной

дисциплины в Университете Марбурга. Мы считаем, что Фойснер, как выдающийся деятель науки, определенно заслуживает большего внимания.

Он, по-видимому, был первым, кто указал на недостатки топологических формул Густава Роберта Кирхгофа (рис. В.2) [162, 168] и Джеймса Кларка Максвелла (рис. В.3) [215], объяснив в 1902 г., почему они не находят применения у физиков и отсутствуют в справочниках по физике. Главная, по его мнению, причина состояла в трудностях выбора принимаемых сочетаний сопротивлений (проводимостей) из очень большого числа возможных сочетаний. Поэтому Фойснер разработал ряд методов поэтапного разложения числителя и знаменателя схемной функции. Заметил, что к понятию «схемная функция» приводит изучение работы Максвелла (1873 г.) [215], который подавал э.д.с. вдоль одного проводника и находил возникающий при этом ток в другом проводнике.

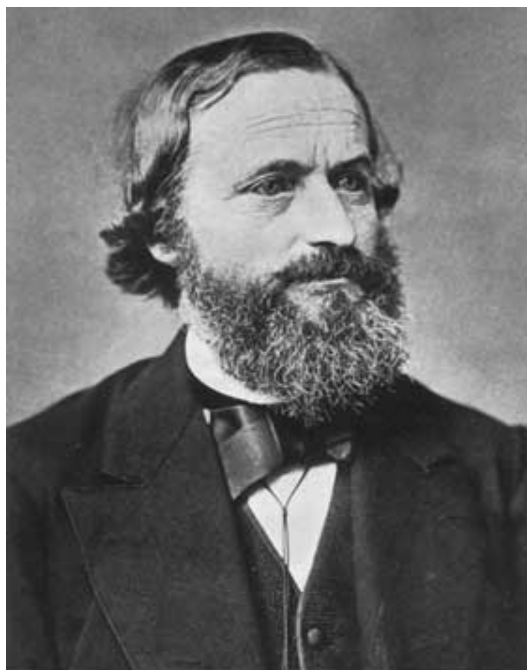


Рис. В.2. Густав Кирхгофф [168]
Fig. В.2. Gustav Kirchhoff [168]

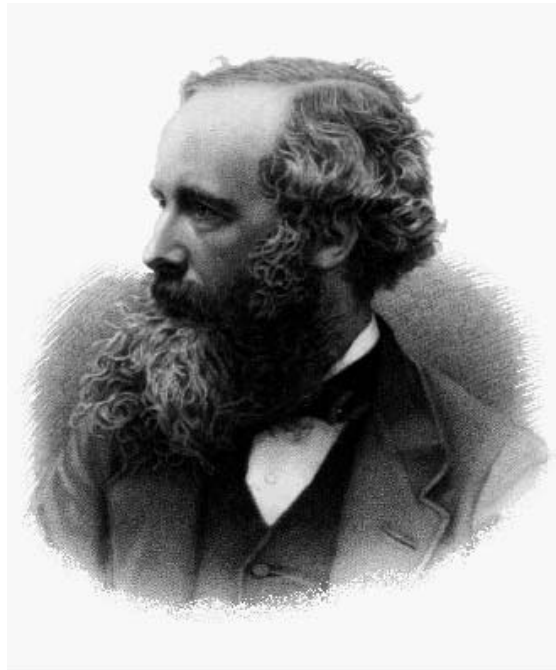


Рис. В.3. Джеймс Максвелл [215]
Fig. В.3. James Maxwell [215]

Интерес В. Фойснера к электротехнике был далеко не случайным, ведь его учителем был сам Кирхгофф, и название его диссертации, первой серьезной научной работы, «Über die Messung der Wärme durch die Veränderung des elektrischen Widerstandes mit der Temperatur» («Об измерении количества теплоты путем учета зависимости электрического сопротивления от температуры») говорит само за себя. Между тем, в истории науки среди учеников основателя электротехники фамилия Фойснера не значится. Возможно это связано с тем, что после получения ученой степени доктора философии В. Фойснер резко меняет направление исследований и возвращается к теории электрических цепей только через тридцать пять лет.

В своих работах [32, 36], опубликованных в 1902-1904 годах в авторитетном журнале «Annalen der Physik und Chemie», Фойснер развил результаты Кирхгофа и Максвелла практически до их современного состояния применительно к пассивным электрическим цепям без взаимоиנדуктивностей. Однако в отличие от работ Кирхгофа и Максвелла, излагающих топологический подход к анализу электрических цепей, результаты Фойснера остаются до сих пор по существу неизвестными специалистам.

Цель данной книги – во-первых, показать вклад В.Фойснера-электротехника в теорию линейных электрических цепей, выполнив анализ его трудов начала прошлого века, которые оказались не востребованными в течение многих десятилетий; во-вторых, проследить развитие идей символического анализа от пионерских работ Фойснера до наших дней.

Биографические сведения о Фойснере были почерпнуты нами из его опубликованных работ и докладов заседаний Общества содействия естествознанию в Марбурге, которые имеются в фондах Фундаментальной библиотеки Ленинградского государственного технического университета, Государственной публичной библиотеки им. М.Е. Салтыкова-Щедрина (г. Ленинград), библиотеки физики Марбургского университета (Bibliothek Physik der Philipps-Universität Marburg). Выражаем нашу признательность госпоже Грохтдрейс (Frau U. Grochtdreis) и господину Кристофу Поляковски (Christoph Pollakowski) за любезное предоставление материалов о В. Фойснере из фондов Библиотеки физики Марбургского университета. Благодарим доктора Дитера Фикка (Dieter Fick), профессора Деканата физики Марбургского университета за проведенное им библиографическое исследование.

Материалы, подготовленные в соавторстве с Питером Томасом (Peter Thomas), доктором философии, профессором рабочей группы «Теоретической физики полупроводников» Деканата Физики Марбургского Университета, о жизни и деятельности Вильгельма Фойснера были опубликованы в работе [145] и настоящую книгу не вошли.

Горшков Константин Сергеевич – ассистент кафедры «Электроснабжение» УГТУ. K.Gorshkov@ulstu.ru

Филаретов Владимир Валентинович – окончил радиотехнический факультет Ульяновского политехнического института (ныне УГТУ) по специальности «Радиотехника». В 2002 г. защитил докторскую диссертацию «Топологический анализ электрических цепей на основе схемного подхода» в Московском энергетическом институте (техническом университете). Профессор кафедры «Электроснабжение» УГТУ. vyfil@mail.ru

The symbolic networks analysis particular link

The ethics of any scientist involves the desire to pay tribute to his colleagues-predecessors, which provides with succession in science and acts as a spur to more qualitative priority investigations. One popular wisdom says that «Everything old is new again», that means with reference to a science that it takes just a step to obtain a new result after deeply studied the classic works.

It must be admitted that the habit «not to read the works of other authors» is very typical for some of the scientists and sometimes is a somebody's pride. However, such a pioneer's glory is like a lottery. As a rule, there is an inquisitive researcher who would doubt and criticize the results of the author of the later work. The repeated achievement of the known results in science is similar to the one in sport of the last years. But in contrast to the natural development of sport skills, the growth of extra publications is not harmless from the intellectual labour consumption point of view.

The symbolic network analysis as section of the electric circuits theory was draws attention of experts almost hundred and fifty years. The meaning of symbolical network analysis is actually understood as the formation of symbolical circuit function [99, 229, 236]. There are thousand of journals articles, hundreds of dissertations and tens of monographies have been devoted to this question for last one and a half centuries. The inexhaustibility of that subjects in many respects is caused by fruitless search of the most preferable of many methods. Moreover many of publications duplicate each other, use the various conceptual system with ignoring terminology of previous works [97], make unfounded declaration about advantages of some methods and algorithms .

As consequence, it has led to almost ninety years of searching for a method which can become «a special part» of the symbolic analysis, that allow «to keep a circuit» [213] of electro and radio engineers expectations. What kind of results were that «a special part» which have been not found and which experts in the field of the symbolic analysis have not grasped «with all might» that can allow them «to prepare solid transition for the following part», to generalization for active electric circuit? In our opinion, the four formulas of Wilhelm Friedrich Feussner could become such important results [31, 32, 34, 36]. He was a German scientist who obtained the recognition in physics [27–30, 33, 35, 37, 38] and devoted his life to Marburg University.

Marburg University Physics department can legally be proud of a great number of world-known scientists who either researched different phenomena in the field of physics, or taught physics at Marburg University. There are such great people among them: Denis Papin, Michael Lomonosov (fig. B.1), John Tyndall, Karl Ferdinand Braun, Alfred Lothar Wegener, Otto Hahn and many others. The brief history of Physics Department is presented in the publication [86]. However, while looking for some information about Feussner and his achievements in Marburg, we were amazed to find that nowadays his name was hardly known among the scientists of Physics Department.

We can say that Wilhelm Feussner's important scientific achievements are practically unknown to the modern scientists. Especially it concerns his results in the field of electrical engineering [31, 32, 34, 36]. We believe that Feussner as an outstanding scientist is definitely worthy of much more attention.

It seems that he was the first who pointed out the shortcomings of Gustav Robert Kirchhoff (fig. 2) [162, 168] and James Clerk Maxwell's (fig. 3) [215] topological formulae and in 1902 explained why these formulae were not used by physicists and absent in physics reference books. According to Feussner, the main reason was that it was difficult to choose the combinations of resistances (conductions) among the whole variety of possible combinations. So, Feussner devised the methods of factorization of a numerator and a denominator of circuit function step-by-step. He noticed that the study of Maxwell's work (1873) [215] led to the «circuit function» notion, where Maxwell put e.m.f. in one of the conductors and then defined the current that occurred in another conductor.

It is no coincidence that Feussner was interested in electrical engineering as his teacher was Kirchhoff himself. And the name of his dissertation, his first serious work, «Über die Messung der Wärme durch die Veränderung des elektrischen Widerstandes mit der Temperatur» (About measuring the quantity of heat considering the dependence of electric resistance on the temperature) speaks for itself. In his works [32, 36] which were published in 1902-1904 in the famous «Annalen der Physik und Chemie» (Annals of physics and chemistry) journal, Feussner developed the Kirchhoff and Maxwell's results practically to their modern presentation in respect to passive electric circuits without mutual inductances. However, unlike Kirchhoff and Maxwell's works where the topological approach is applied to electrical circuits analysis, the Feussner's results remain still unknown to the specialists.

The aim of this book is, firstly, to show the Feussner-electrician's contribution to the circuits theory analyzing his pioneer works of the beginning of the last century which were unclaimed for many decades, and, secondly, to follow the development of symbolic analysis ideas from Feussner's works to modern times. Biographical information about Feussner was taken from his published works and reports of Natural Science Assistance Society meetings in Marburg which are kept in Leningrad State Technical University Main Library, State Public Library in honour of M.Saltyikov-Schedrin (Leningrad), Physics Library at Marburg University (Bibliothek Physik der Philipps-Universität Marburg). We express our gratitude to Ms Grochtdreis (Frau U.Grochtdreis) and Mr Christoph Pollakowski for their obliging provision of the information about Feussner from Marburg University Physics Library.

The results of cooperation with doctor Thomas Peter, a professor of Marburg University Physics Department, in the information search about Wilhelm Feussner's life and activity was used in paper [145] and was not included in present book.

Глава 1. Жизнь и деятельность Вильгельма Фойснера, основоположника схемного подхода к анализу цепей

1.1. Вехи научной деятельности

Немецкий ученый и естествоиспытатель Фридрих Вильгельм Фойснер [44, 57, 79, 80, 86, 145, 257, 264, 297, 298] (рис. 1.1) родился 25 февраля 1843 года в городе Ганау – на родине знаменитых братьев Гримм. Ему посчастливилось получить академическое образование под руководством сразу двух великих соотечественников – всемирно известного Г.Р. Кирхгофа в Гейдельберге и Христиана Людвига Герлинга в Марбурге [79, 80, 86].

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT
vereinigt mit dem
JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. II 31. Jahrgang

1. Juni 1930
Redaktionsschluß für Nr. 13 am 20. Juni 1930.

INHALT:

<p>F.A. Schulze, Wilhelm Feussner. S. 513.</p> <p>Originalmitteilungen:</p> <p>A. Dadiou u. K. W. F. Kohlrusch, Der Ramaneffekt in binären Gemischen. S. 514.</p> <p>A. J. Rothe, Zur Frage der Restionen in der intermittierenden Glimmladung. S. 520.</p> <p>H. Margenau, Über die Veränderlichkeit der Anzahl freier Metallelektronen mit der Temperatur. S. 540.</p>	<p>P. C. Mahanti, Über das Dipolmoment homologer Reihen. S. 546.</p> <p>H. Dingler, Über eine exakte philosophische Methode, welche auch für die Physik relevant ist. S. 555.</p> <p>Besprechungen:</p> <p>J. Nikuradse, Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen. S. 558.</p> <p>M. Planck, Das Weltbild der neuen Physik. S. 558.</p>	<p>H. Barkhausen, Elektronenröhren. 3. Bd. S. 559.</p> <p>W. Gerlach u. E. Schweitzer, Die chemische Emissionsspektalanalyse. S. 559.</p> <p>C. A. Bjerknes, Niels Henrik Abel. S. 559.</p> <p>L. Schrutka, Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenschiebers. S. 560.</p> <p>A. Defretin, Cours d'électricité industrielle. Tome I. S. 560.</p> <p>Tagessereignisse. S. 560.</p> <p>Personalien. S. 560.</p>
---	--	--

Wilhelm Feussner.

Von F. A. Schulze.

<p>Es sei hier in Pietät des im hohen Alter von 85 Jahren gestorbenen Vertreters der theoretischen Physik an der Universität Marburg i. H., Wilhelm Feussner, gedacht. Mit ihm ist wieder einer der Physiker heimgegangen, die noch ganz der Denkweise und dem Ideenkreis der großen klassischen Epoche der Physik angehörten, die durch die Namen G. Kirchhoff, H. v. Helmholtz, H. Hertz gekennzeichnet ist. Sie erscheint neben der modernen vom Ausgang des vergangenen Jahrhunderts anhebenden neuen Periode der Physik mit ihren so vielgestaltigen gänzlich neuartigen Gedanken, mit ihrer beispiellosen Kühnheit in der Kritik und Umgestaltung alteingewurzelter Vorstellungen von einer Abrundung, relativen Einfachheit und schö-</p>	<p>nen Geschlossenheit, um die sie die heutige Physik wohl manchmal beneiden könnte, die tastend ihren Weg suchen muß, um die Fülle neuer Erscheinungen deuten zu können.</p> <p>Der äußere Lebensgang Feussners ist einfach gewesen. Er ist 1843 in Hanau geboren, hat seine Jugendzeit zunächst dort, dann in Rinteln und in Marburg verlebt. Seine akademische Ausbildung empfing er in Heidelberg, wo er noch bei G. Kirchhoff hörte, und in Marburg, wo noch Gerling, der Freund von Gauß, lehrte. 1867 erwarb er sich mit der Abhandlung: „Über die Messung der Wärme durch die Veränderung der elektrischen Widerstände mit der Temperatur“ sowohl die Doktorwürde als auch die Venia docendi. Es handelt sich in dieser Arbeit</p>
--	--




Рис. 1.1. Некролог В. Фойснера в немецком «Физическом журнале» №31, 1930 [79]

В 1867 г. после успешной защиты диссертации «*Über die Messung der Wärme durch die Veränderung des elektrischen Widerstandes mit der Temperatur*» («Об измерении количества теплоты путем учета зависимости электрического сопротивления от температуры») в Гейдельберге В. Фойснер получает степень доктора философии, а также пожизненное право преподавания физики в университете (так называемое «*venia docendi*» – в переводе с латинского «право преподавать»). «В этой работе речь идет о целесообразном исполнении и оформлении устройства (на что прежде кратко указывал фон О. Сванберг – шведский математик и астроном), которое в настоящее время называется болометром. Диссертация Фойснера содержала (по крайней мере, на момент публикации некролога (рис. 1.1) – по утверждению Ф.А. Шульца) некоторые и сегодня достойные внимания данные и положения» [79, стр. 514]. В 1878–1881 годах усовершенствованием болометра занимался С.П. Лэнгли, который и вошел в историю науки как формальный изобретатель этого прибора.

Болометр (рис. 1.2,а) представляет весьма тонкую вычерненную металлическую проволоку или полоску, введенную в одну из ветвей моста С. Уитстона [91] (рис. 1.2,б) и помещаемую на пути потока лучистой энергии. Из-за своей малой толщины пластинка под действием излучения быстро нагревается и ее сопротивление повышается.

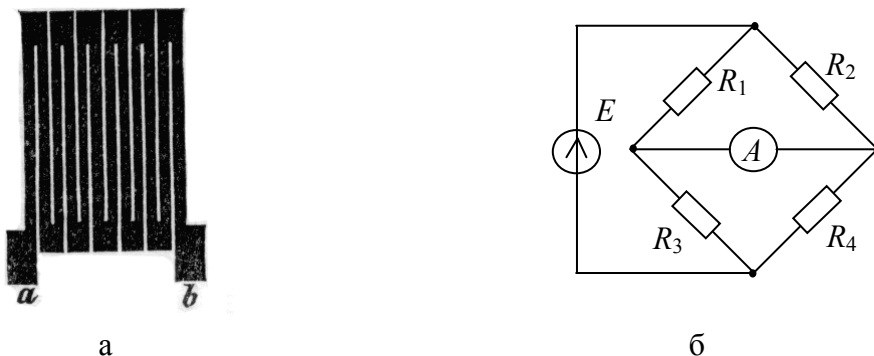


Рис. 1.2. Болометр [<http://ru.wikipedia.org/wiki/Болометр>] и мостик Уитстона [91]

Болометр чувствителен ко всему спектру излучения. Но применяют его в основном в астрономии для регистрации излучения с субмиллиметровой длиной волны (промежуточное между СВЧ и инфракрасным): для этого диапазона болометр – самый чувствительный датчик. Источником теплового излучения может быть свет звезд или Солнца, прошедший через спектрометр и разложенный на тысячи спектральных линий, энергия в каждой из которых очень мала.

По неизвестным нам причинам В. Фойснер вскоре резко изменил тему своих исследований и переехал поближе к отчому дому в город Марбург – колыбель федеральной земли Гессен (рис. 1.3), и уже 14 января 1869 года сделал доклад «*Über der Bumerang*» [27] («О бумеранге») на заседании

Марбургского Общества содействия естествознанию. Одновременно он становится вначале внештатным, а затем, с 1881, и действительным членом этого общества.



Рис. 1.3. Марбург, федеральная земля Гессен, Германия [84]

Стоит отметить, что становление физики как научной и учебной дисциплины в Марбургском университете началось с назначением Герлинга в 1817 году профессором математики, физики и астрономии. Герлинг был близким другом К.Ф. Гаусса, который в то время возглавлял кафедру в Геттингене. Герлинг известен своими исследованиями в области геодезии, в которых использовал метод наименьших квадратов Гаусса [79].

С 1871 года Фойснер работает в должности приват-доцента физики и математики Марбургского университета. В эти годы В. Фойснером был опубликован ряд работ в журнале *«Annalen der Physik und Chemie»*: «О двух новых методах для измерения высоты облаков», 1871 г.), «Ueber die von Hrn. Sekulic beschriebene Interferenzerscheinung» («Об описании явления интерференции», 1873 г.) [28], «Neuer Beweis der Unrichtigkeit der Emissionstheorie des Lichts» («Новое доказательство некорректности эмиссионной теории света», 1877 г.) [29], «Über die Interferenzerscheinungen dünner Blättchen mit besonderer Rücksicht auf die Theorie der Newtonschen Ringe» («Об интерференции в тонких пленках с учетом теории колец Ньютона», 1881г.) [30].

Как видно из названий публикаций Фойснера тех лет, немецкий ученый плодотворно работал в различных разделах физики, однако наибольший интерес для него представляли исследования в области

оптики, в которых он добился немалых успехов. Он считался общепризнанным специалистом, и его трактовки явлений интерференции и поляризации были включены в пособие по физике А. Винкельмана [93]. Фойснер являлся составителем главы об интерференции и во втором издании этого пособия. В дальнейшем, уже после отставки Фойснера, материал об интерференции, после значительной переработки в соавторстве с Л. Яникки и дополнения новыми результатами исследований, вошел в учебник по оптической физике «Dem Handbuch der Physikalischen Optik» под редакцией Е. Герке [48].

С 1880 г. В. Фойснер преподает теоретическую физику в Марбургском Университете сначала в должности внештатного профессора, а с 1908 года уже в качестве штатного профессора. Профессор Питер Томас (рис. 1.4), специалист по истории Марбургского Университета отмечает, что в Марбурге вплоть до последних десятилетий девятнадцатого века теоретическая физика как область научных исследований еще не сформировалась [86]. Фойснер по существу был первым физиком-теоретиком в Марбурге и в 1910 году основал регулярный научный семинар по этой дисциплине. Если во времена Герлинга физики довольствовались шестью небольшими комнатами, то к 1915 году его преемник Фойснер вместе с коллегами имел в распоряжении большой особняк, оснащенный самым современным оборудованием (рис. 1.5), построенный под руководством профессора Ричарца [79].



Рис. 1.4. Питер Томас, профессор Марбургского Университета
[\[http://www.uni-marburg.de\]](http://www.uni-marburg.de)

Интересы В. Фойснера во второй половине его творческой жизни были весьма разносторонними. Наряду с завершением своих работ в области теоретической физики [31, 32, 34, 36] он разработал основу для становления и развития топологического анализа электрических цепей [32, 36]. Удивительно, но эти статьи, опубликованные в авторитетнейшем журнале «*Annalen der Physik*» (ранее именовавшимся «*Annalen der Physik*

und Chemie»), остались практически незамеченными современниками Фойснера! Первые ссылки на них в литературе относятся к пятидесятым годам двадцатого века [3, 8, 12], а Ф.А. Шульц, автор некролога Фойснеру [79], даже не упоминает эти работы в числе достижений немецкого ученого.



Рис.1.5. Старый и новый университетские корпуса, отведенные для ученых-физиков [86]

После пятидесяти лет, посвященных Марбургскому Университету, в 1918 году Фойснер подает в отставку. В 1927 году он имел уникальную возможность отпраздновать как 400-летие Университета, так и собственный юбилей – 60 лет со дня защиты диссертации (*Dozenenjubilaem*). Жизненный путь Фойснера был удивительно ровным и гладким для тревожного и бурного времени социальных революций и мировых войн. «Тихая работа и достойное исполнение долга были счастьем его жизни» [79]. Оставшиеся годы он провел на заслуженном отдыхе в окружении семьи. Скончался Фридрих Вильгельм Фойснер 5 сентября 1928 года в Марбурге в возрасте 85 лет.

1.2. Метод выделения параметров

Сущность вычислительных преимуществ топологических методов разложения определителей Фойснера состоит, во-первых, в устранении перебора излишних сочетаний ветвей схемы и, во-вторых, в формировании скобочного выражения определителя, т.е. выражения с вынесенными за скобки общими множителями. Последнее многократно уменьшает количество требуемых вычислительных операций. Под определителем Z -схемы (Y -схемы), как и Фойснер, мы будем понимать определитель соответствующей матрицы контурных сопротивлений (узловых проводимостей). Это подчеркивает то обстоятельство, что топологические

методы предназначены для получения схемной функции, минуя формирование матрицы схемы.

Фойснер предложил формулы выделения параметров [32, 36], позволяющие свести разложение определителя пассивной схемы к разложению определителей более простых производных схем, в которых отсутствует некоторая выделяемая ветвь z или y :

$$\Delta = z\Delta^z + \Delta_z, \quad (1.1)$$

$$\Delta = y\Delta_y + \Delta^y, \quad (1.2)$$

где Δ – определитель пассивной схемы. Нижний или верхний индексы при символе Δ указывают на стягивание или удаление выделяемой ветви соответственно. Стягивание ветви равносильно ее замене идеальным проводником. В результате стягивания и удаления ветвей могут образоваться вырожденные схемы, определитель которых тождественно равен нулю, что упрощает разложение определителей.

На рис. 1.6,а и рис. 1.6,б представлены формулы (1.1) и (1.2) в схемно-алгебраической форме [281].

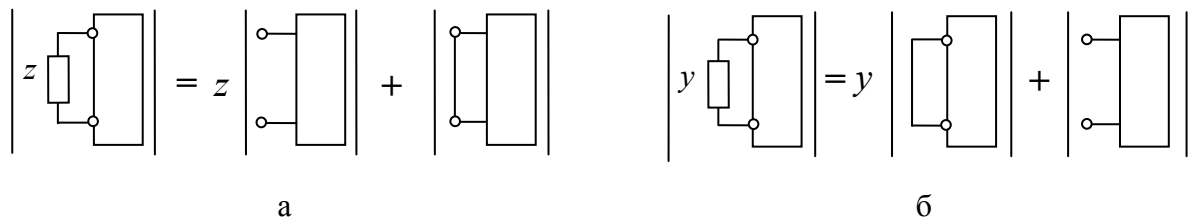


Рис. 1.6. Схемно-алгебраическое представление формул Фойснера (1.1) (а) и (1.2) (б)

Рекурсивным применением формул (1.1) и (1.2) достигается сведение исходных схем к простейшим, определители которых выводятся из закона Ома [281].

1.3. Перечисление деревьев графа

В середине 60-х годов было установлено, что наиболее простой алгоритм перечисления деревьев графа базируется на формуле (1.2) [67]. В символьном виде множество $S(G)$ всех деревьев графа G должно удовлетворять условию [57]:

$$S(G) = eS(G/e) \cup S(G \setminus e), \quad (1.3)$$

где e является ребром графа G , G/e и $G \setminus e$ – графы полученные из исходного в результате стягивания и удаления ребра e соответственно.

Крупный теоретик-программист Дональд Кнут в четвертом томе своего монументального труда «Искусство программирования» приводит Фойснера в качестве основоположника эффективной генерации деревьев графов через формулы выделения (1.1)–(1.2) [59].

Более ранние упоминания работ Фойснера можно найти в публикациях Дж.Е. Алдерсона [2], Г.Дж. Минти [67, 68], В.К. Чена [16–18], Ф.Т. Беша [5], С.Дж. Колборна, Р.П.Дж. Дея и Л.Д. Нела [21].

1.4. Диакоптика Фойснера

Фойснером были высказаны некоторые идеи диакоптического подхода к анализу схем [32, 36] задолго до появления работ Г. Крона [180]. Именно им было впервые введено и использовано понятие «подсхема» («частичная цепь») и предложен метод деления (бисекции) схемы, в основе которого лежат формулы бисекции по одному (1.4) и двум узлам (1.5) соответственно:

$$\Delta = \Delta 1 \cdot \Delta 2, \quad (1.4)$$

$$\Delta = \Delta 1 \cdot \Delta 2(a, b) + \Delta 1(a, b) \cdot \Delta 2, \quad (1.5)$$

где $\Delta 1$ и $\Delta 2$ – определители первой и второй подсхем, из которых состоит схема; $\Delta 1(a, b)$ и $\Delta 2(a, b)$ – определители схем, образованных соответственно из первой и второй подсхем в результате объединения общих узлов. Формулы (1.4) и (1.5) наглядно проиллюстрированы на рис. 1.7 и рис. 1.8 соответственно [281].

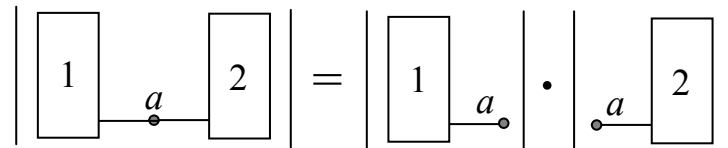


Рис. 1.7. Бисекция схемы по одному узлу

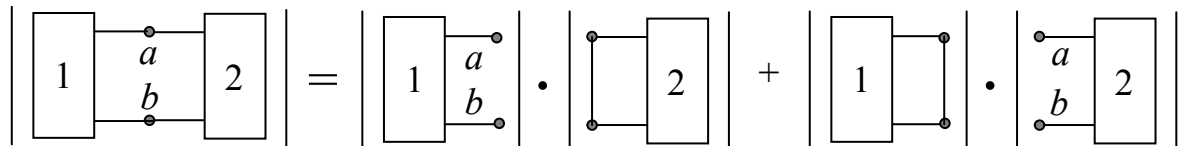


Рис. 1.8. Бисекция схемы по двум узлам

1.5. Методы разложения схемных определителей

Помимо рассмотренного выше метода выделения параметров по формулам (1.1) и (1.2), Фойснером были предложены и доказаны методы разложения определителя Z -схемы (Y -схемы) по Z -контур (Y -узел) и по Z -узлу (Y -контур). Формулировки этих методов Фойснера заслуживают того, чтобы привести их полностью [32, 36] (заголовки утверждений и их нумерация не принадлежат оригиналу).

1. Если $h \leq \mu$, то образуют сочетания по $h, h - 1, \dots, 1$; $h > \mu$, то – сочетания по $\mu, \mu - 1, \dots, 1$ из ветвей сопротивлений контура с

исключением тех сочетаний ветвей, при удалении которых схема распадается на части. Каждое такое произведение сопротивлений умножается на определитель схемы, которая получена из первоначальной схемы в результате удаления ветвей контура и объединения узлов, которые связываются ветвями контура, не входящими в сочетание. Сумма указанных произведений есть искомый определитель.

2. Разложение определителя Y -схемы по узлу.

Если к Y -схеме добавляется узел с p Y -ветвями, оканчивающимися в каких-либо узлах исходной схемы, то определитель новой Y -схемы есть сумма, слагаемые которой состоят из всех сочетаний по $p, p - 1, \dots, 1$ из проводимостей новых ветвей, а каждое такое произведение проводимостей умножено на определитель схемы, полученной из первоначальной схемы в результате объединения конечных узлов ветвей, которые имеются в данном сочетании.

3. Разложение определителя Z -схемы по узлу.

Если к Z -схеме добавляется узел с p z -ветвями, оканчивающимися в какими-либо узлах исходной схемы, то определитель новой Z -схемы есть сумма, слагаемые которой состоят из всех сочетаний по $p - 1, p - 2, \dots, 0$ из сопротивлений новых ветвей, а каждое такое произведение сопротивлений умножено на определитель схемы, полученной из первоначальной схемы в результате объединения конечных узлов добавляемых ветвей, которые отсутствуют в данном сочетании.

4. Разложение определителя Y -схемы с μ независимыми контурами по контуру, содержащему h ветвей.

Если $h \leq \mu$, то образуют сочетания по $h - 1, h - 2, \dots, 0$; $h > \mu$, то – сочетания по $h - 1, h - 2, \dots, h - \mu$ из проводимостей ветвей контура с исключением тех сочетаний ветвей, при удалении которых схема распадается на несвязанные части. Каждое такое произведение проводимостей умножается на определитель схемы, которая получена из первоначальной схемы в результате удаления ветвей контура и объединения узлов, которые связываются ветвями, имеющимися в сочетании. Сумма этих произведений и есть искомый определитель.

На наш взгляд, утверждения 1, 2, 3 не уступают, а даже превосходят современные формулировки [160, 236] по общности и четкости. Утверждение 4, которое, по-видимому, в более поздних источниках не приводилось, дополняет предыдущие утверждения. В результате имеем полную группу утверждений относительно разложения определителя схемы по узлу и контуру.

В. Фойснер приводит правило [32], которое позволяет учесть наличие многократных z -ветвей в выражении определителя, полученном для упрощенной схемы, образованной в результате формальной замены многократных ветвей однократными. Это обеспечивает существенное сокращение трудоемкости расчета сложных электрических цепей.

1.6. Топологическая формула передачи

В 1847 г., спустя два года после опубликования своих законов, Кирхгоф попытался сделать процесс получения решения более наглядным. Его метод анализа z -схем без управляющих связей использует непосредственно схему замещения цепи и не требует предварительного составления ее уравнений. Дуальный результат для y -схем опубликовал Максвелл в 1873 году [215]. В литературе по этому поводу обычно называют 1892 год – дату третьего издания знаменитого трактата [99, 229]. Максвелл вводит отношение (впоследствии названное символьной схемной функцией)

$$H = \Delta N / \Delta D, \quad (1.6)$$

где ΔN и ΔD – соответственно числитель и знаменатель ССФ, в которых параметры всех элементов схемы представлены символами.

Указанные результаты Кирхгофа и Максвелла не были развиты, если не принимать во внимание их математическую (теоретико-графовую) интерпретацию В. Айренса [1]. В. Фойснер в 1902 г. обратил внимание на трудности построения ССФ с помощью топологических формул Кирхгофа и Максвелла [32]. Формирование ССФ по Фойснеру предусматривает разложение определителей исходной схемы и производных от нее схем по выражениям (1.1)–(1.2) без составления уравнений цепи. Важно, что на каждом шаге расчета приходится иметь дело со схемой, менее сложной, чем исходная схема, а не с абстрактными сочетаниями ветвей исходной схемы.

Для упрощения нахождения числителя ССФ как Z -, так и Y -схемы (по сравнению с формулами Кирхгофа и Максвелла) Фойснером были получена формула, в которой совместно учитывались слагаемые, обусловленные вкладом в сумму слагаемых числителя каждого контура схемы, проходящего через источник напряжения и ветвь с искомым током [31]. Предложенная Фойснером топологическая формула передачи позволяет найти числитель ССФ посредством перечисления контуров передачи между независимым источником и ветвью с искомым откликом:

$$\Delta N = \sum_{i \in q} P_i \Delta_i \quad (1.7)$$

где q – число контуров передачи, P_i – произведение проводимостей, входящих в i -й контур передачи, взятое с соответствующим знаком; Δ_i – определитель схемы при стягивании всех ветвей i -го контура.

В схемном виде топологическая формула передачи представлена на рис. 1.9. Сама идея поиска контуров, содержащих и генератор, и приемник, для получения числителей схемных функций принадлежит Фойснеру.

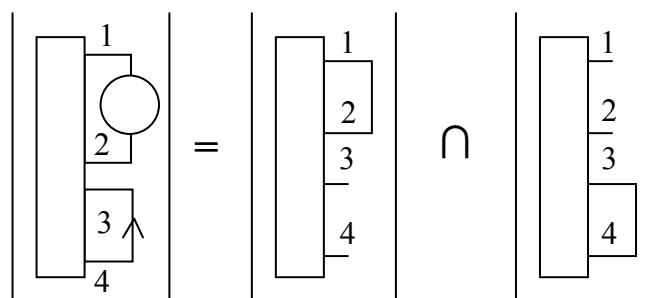


Рис. 1.9. Топологическая формула передачи Фойснера в схемном виде

1.7. Полная схема и оригинальное доказательство формулы Кэли

Первым, кто использовал полную схему в качестве тестовой при разработке методов теории цепей, был учитель Фойснера – Кирхгоф. Это была полная схема на четырех узлах, предложенная Уитстоном [91] (рис. 1.2,б). Ее также использовал Максвелл, и в наше время специалисты по-прежнему применяют полную четырехузловую схему как базовый тест для современных компьютерных систем схемотехнического моделирования (рис. 2.6).

Фойснер обратил внимание на трудоемкость анализа полной схемы, введенной Максвеллом [215], и рассмотрел топологический подход к анализу электрических цепей, в котором полная схема используется в качестве шаблона [32]. Фойснер, по сути, ввел в электротехнику полные схемы с произвольным числом узлов и разработал эффективные для своего времени методы их исследования.

Он предложил использовать для анализа схемы с числом узлов, равным n , известный определитель полной схемы на n узлах, в котором слагаемые, включающие параметры недостающих ветвей в анализируемых схемах, приравнивались к нулю. Так, ниже представлена полная Z -схема на пяти узлах (рис. 1.10,а) и ее определитель (1.8), рассчитанный по (1.1).

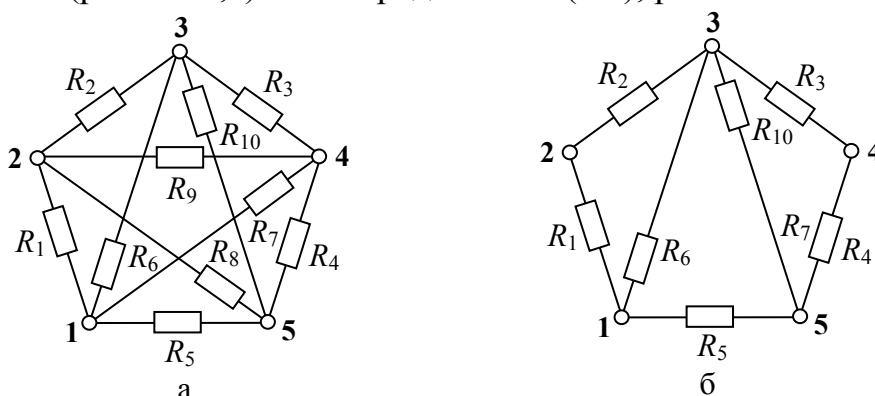


Рис. 1.10. Иллюстрация применения метода шаблона полной схемы

$$\begin{aligned} \Delta = & (R_1(R_{10}(R_3((R_2+R_6)((R_5+R_7)(R_4+R_8+R_9)+R_4(R_8+R_9))+R_5((R_4+R_8)(R_7+R_9)+R_7R_9) \\ &)+R_8(R_4(R_7+R_9)+R_7R_9))+R_4(R_2(R_8+R_9)+R_8R_9))(R_6+R_7)+((R_4+R_8)(R_2+R_9)+R_2R_9) \\ & (R_5(R_6+R_7)+R_6R_7))+R_3(R_2(R_8+R_9)+R_8R_9))((R_4+R_7)(R_5+R_6)+R_5R_6)+((R_3+R_9)(R_2+ \\ & R_8)+R_2R_8)(R_4(R_5(R_6+R_7)+R_6R_7)))+(R_{10}(R_3(R_5((R_4+R_8)(R_7+R_9)+R_7R_9)+R_8(R_4(R_7+R_9) \\ &)+R_7R_9))+R_7R_9(R_4(R_5+R_8)+R_5R_8))+R_5R_8(R_3(R_4(R_7+R_9)+R_7R_9)+R_4R_7R_9))(R_2+R_6)+ \\ & ((R_{10}+R_3)(R_5((R_4+R_8)(R_7+R_9)+R_7R_9)+R_8(R_4(R_7+R_9)+R_7R_9))+R_4(R_5(R_7(R_8+R_9)+R_8 \\ & R_9)+R_7R_8R_9))(R_2R_6)) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для анализа схемы на рис. 1.10,б достаточно удалить из формулы (1.8) все слагаемые, в которые входят параметры отсутствующих элементов. В результате получим:

$$\Delta = (R_1+R_2)((R_3+R_4)(R_{10}+R_5+R_6)+R_{10}(R_5+R_6))+R_6((R_3+R_4)(R_{10}+R_5)+R_{10}R_5) \quad (1.9)$$

Много лет спустя были разработаны методы, реализующие этот подход для анализа [246] и синтеза [99, 224] RLC -схем. Важно, что Фойснер сформулировал все свои результаты как для Z -, так и для Y -схем, одним из первых, используя принцип дуальности [36].

Через 56 лет математик Л.Е. Кларк [19] в журнале Лондонского математического общества повторно рассмотрел один метод наращивания Фойснера для доказательства теоремы Кэли о числе деревьев T в полном графе. Под формулой Кэли понимается выражение $T=q^{q-2}$, где q – число узлов схемы (графа). Следует подчеркнуть, что Фойснер получил эту формулу [31] независимо от математика Кэли, заложившего основы теории графов [17].

1.8. Топологическое доказательство принципа взаимности

В работе Фойснера [32] исследуется принцип взаимности и приводится его топологическое доказательство. Причем Фойснер представляет это доказательство всего лишь как побочный результат, отмечая, что его мог сделать еще сам Кирхгоф.

Как известно, основанный на теореме взаимности принцип взаимности гласит: если эдс E , действуя в некоторой ветви схемы, не содержащей других источников, вызывает в другой ветви ток I , то принесенная в эту ветвь эдс E вызовет в первой ветви такой же ток I .

Обозначим проводник, в котором находится источник эдс, через a , следовательно, числитель ССФ $Z(N)$ (1.6), который умножается на E и дает ток I_a этой ветви, равен ΔN_a .

Чтобы найти числитель выражения для тока i_k в другой ветви b , поступим следующим образом. Предположим, что каждый отдельный проводник A образует закрытые контуры K_1, K_2, \dots, K_p с постоянными токами интенсивности I_1, I_2, \dots, I_p в направлении прохождения через a . Очевидно, что первый закон Кирхгофа $\sum i_n = 0$ по отношению к точке

разветвления будет выполняться для совокупности этих токов при любых величинах I . Допустим, что в каждом проводнике цепи сумма протекающих через него токов дает результирующий ток i , тогда должно выполняться условие для каждого распределения сопротивлений в цепи:

$$\sum I = i_a. \quad (1.10)$$

Будем считать, что $I_f = Z_f E / \Delta N$ и $\sum Z_f = \Delta N_a$. Следовательно, Z_f составляется из членов ΔN_a . Чтобы получить способ возможного составления распределения токов, следует помнить, что удаление какой-нибудь ветви контура K приводит к его разрыву и что, следовательно, интенсивность протекающего через него тока I будет равна нулю. При этом I_f, Z_f не могут содержать сопротивления R проводников, образующих контур. Следовательно, если E находится в a , то для получения числителя i_k используются одновременно оба проводника a и k . Следует взять последовательность членов из ΔN_a , в которых не встречается R проводников, содержащихся в K_1 , присоединить к ним члены, которые не содержат R из K_2 , и так далее до использования всех контуров K_1, K_2, \dots, K_g .

Для определения знака выбирают какое-либо направление проводника k в качестве положительного, затем при совпадении направления тока получается член с положительным знаком, а при несовпадении с отрицательным.

Фойснер формулирует правило, согласно которому числитель i_k есть сумма комбинаций из R_1, R_2, \dots, R_n по $\mu-1$ элементов, после удаления которых остается одна замкнутая фигура, содержащая λ . Каждая комбинация умножается на сумму эдс, которые принадлежат замкнутой фигуре. эдс при этом считаются положительными по направлению, если в этом направлении положителен ток i_j . Для определения тока в проводнике b , если эдс находится в a , используется замкнутый контур, который проходит через эти оба проводника (a и b). Тот же самый замкнутый контур используется для определения тока в a , если эдс находится в b . Тогда если в цепи проводников эдс из ветви a без изменения переносится в k , то в a будет действовать тот же самый ток, который раньше был в k .

1.9. Обобщенный метод контурных токов

Максвелл, по сообщению Джона Амброза Флеминга [47] (изобретателя первой электронной лампы, названной впоследствии диодом) в своей последней университетской лекции показал другой вид разложения тока в цепи с проводниками. По описанию Флеминга метод не является общеприменимым. Предполагается, что цепь лежит на плоскости таким образом, что проводники нигде не перекрываются. Окружность каждого контура, в котором предполагается один постоянный ток, проходится в определенном направлении (против часовой стрелки). Через

каждый проводник внутри цепи течет два тока граничных контуров противоположных значений, и их разность и есть протекающий в этом проводнике ток. Ясно, что подобное расположение цепи на плоскости не всегда возможно, как, например, в цепи, полученной путем соединения двух противоположащих узлов в схеме моста Уитстона.

В работе [32] приводится, по словам самого Фойснера, «небольшое изменение», позволяющее сделать метод общеприменимым. Можно, как показал Кирхгоф, для каждой цепи взять различные системы $\mu = n - m + 1$ замкнутых контуров, из которых можно составить все возможные в цепи замкнутые контура. Фойснер предлагает считать такой системой k_1, k_2, \dots, k_μ , при этом в каждом контуре протекает один постоянный ток I_1, I_2, \dots, I_μ . Для каждого контура и каждого проводника устанавливается какое-нибудь направление, в котором ток должен быть направлен положительно. Затем к каждому такому контуру следует применить закон Кирхгофа, что позволит получить μ линейных уравнений между E , сопротивлениями цепи и I_1, \dots, I_μ , откуда можно найти искомые токи.

Фойснер указывает на то, что определитель, который можно получить с помощью классической записи закона Кирхгофа, будет n -го порядка, а определитель, полученный по Максвеллу, только μ -го порядка. Таким образом, преимущества нового метода не так велики, как хотелось бы. Отдельные элементы формы Кирхгофа обычно также имеют μ -й порядок из-за $(m-1)$ кратного появления коэффициентов ± 1 . К тому же у Максвелла образуется значительно большее количество взаимно уничтожающихся членов, следовательно, предложенная Максвеллом методика не имеет существенных преимуществ по сравнению с изначальным подходом Кирхгофа.

Внимательное изучение работ Вильгельма Фойснера показало, что достигнутые им научные результаты, важнейшие из которых были рассмотрены в этой главе, опередили свое время и несли в себе потенциал для ускоренного развития теории электрических цепей.

В следующей главе будет показано, что развитие идей Фойснера стало уделом немногих энтузиастов, которые, как правило, не оставляли последователей. Так сложилось, что развитие теории электрических цепей преимущественно базировалось не на собственно схемной основе, а на использовании аппаратов матриц, графов, теории множеств. В результате схемный подход к анализу цепей оставался в зачаточном состоянии, что привело в конечном итоге к кризису всего символического анализа электрических цепей.

Глава 2. Символьный анализ электрических цепей: возвращение к схемному подходу

2.1. Установление приоритета Фойснера

Первым специалистом в области анализа линейных электрических цепей (ЛЭЦ), который смог оценить основной результат Фойснера (1.2), был Персиваль [73]. Необходимо подчеркнуть, что предложенный Фойснером метод разложения определителя Z -схемы (Y -схемы) по Z -контур (узел) для схем обычно приписывают С.Дж. Мейсону, хотя последним в 1957 году был предложен только метод разложения определителя по путям между парами узлов [62]. Методы Фойснера для Z -схем были заново сформулированы на основе принципа дуальности в 1968 г. [160]. Аналогично были получены формулы Фойснера для разложения определителя Z -схемы (Y -схемы) по Z -узлу (Y -контур) [236].

Полученная Фойснером топологическая формула передачи (1.6)–(1.7) была повторно «открыта» Мейсоном (только для Y -схем) через полвека с лишним [62]! Таким образом, строго говоря, Мейсону принадлежит лишь заслуга обобщения формул немецкого ученого для анализа активных схем. Следовательно, топологическая формула передачи для пассивных схем должна носить имя Фойснера, но не Мейсона, а топологическую формулу передачи для активных схем можно назвать формулой Фойснера–Мейсона.

По поводу авторства второй формулы также необходимо сделать уточнение. Мейсон в своей работе [62] ссылается на статью Л. Робишо (эта ссылка имеется также в [227]), датированную 1956 г., в которой получена в принципе сходная топологическая формула. Поясним, что унисторный граф Мейсона и двунаправленный Y -граф Робишо по существу представляют собой один и тот же вид графа. Примечательно, что аналогичная топологическая формула была выведена под названием «правило циклов» на полтора десятилетия раньше Мейсона создателем математической теории информации К.И. Шенноном [106]. Советский исследователь И.И. Гальперин также претендует на авторство этой формулы [121], которая была получена им одновременно с Шенноном.

И это не единственное недоразумение, которое происходило с полученными Фойснером результатами. В достаточно широко известной работе [90] немецкому ученому приписывается только один из разработанных им методов – метод выделения ветвей. В другой работе [229] метод бисекции по двум узлам с использованием формул (1.4) и (1.5) авторы называют «правилом Персиваля». Противоречия в отношении авторства этих формул имеются также в капитальной монографии П.М.Лина «Символьный анализ цепей» [61, с. 45 и с. 109]. Схожая ситуация в обзорной части статьи [3], в которой используется сочетание методов ветвей и путей передачи. Причем первый метод называется

правильно (метод Фойснера), а второму методу присваивается имя другого исследователя – современника автора. В иных случаях, как это имело место в книге [223], где формулы (1.1)–(1.2) и (1.4)–(1.5) применяются для исследования схем с переключаемыми конденсаторами и называются «методом С. Хоана», авторы, пользуясь результатами Фойснера, даже не упоминают его имени! Причем делают это без всякого умысла, очевидно, даже не подозревая о существовании работ [32, 36].

Искажения научных приоритетов в зарубежных источниках не могли не повлечь за собой неточности при указании авторства в отечественной литературе [96, с. 57], [153, с. 11, с. 95 и с. 207] и т.д. Тем не менее, приоритет Фойснера был установлен именно в нашей стране [257]. За пятнадцать лет до этого формулы выделения параметров (1.2)–(1.3) и формула для числителя ССФ (1.7) получили известность в СССР, но как формулы Мейсона, после опубликования их В.Г. Мироновым в учебнике ТОЭ, удостоенном Ленинской премии [236].

К сожалению, на родине Фойснера не известны его результаты в области теории электрических цепей. Это показало, например, обсуждение доклада [23] на пятом международном семинаре по символьным методам и приложениям к схемотехническому проектированию в Кайзерляуторне (Германия).

2.2. Тернистый путь развития символьного анализа: теоретико-множественный, матричный, графовый подходы

Кризис символьного анализа как следствие забвения наследия Фойснера. Надежды В. Фойснера на то, что его методы будут использованы, не оправдались. Почти три десятилетия топологические методы решения контурных и узловых уравнений были в забвении. Интерес к топологическому подходу возобновился в 30-е годы. Однако на последующее развитие этой области оказали влияние, по-видимому, лишь результаты Р.Т.П. Ванга, который предложил специальную алгебру для формализации поиска деревьев или дополнений деревьев электрической схемы [89, 99]. Представляется, что это был, в определенной мере, регресс по отношению к методам Фойснера.

Использование Вангом ряда математических абстракций и формализация методики лишь немногим улучшали топологические формулы Кирхгофа и Максвелла. Кроме того, алгебраический метод Ванга фактически отрицал применение топологических понятий и схемных моделей, являющихся наиболее общим и в то же время наглядным математическим описанием цепи. Это же замечание можно отнести и к алгебре структурных чисел, разработанной в 60-е годы и базирующейся на результатах Ванга [99].

Очевидно, что всякого рода искусственные построения, будь то матрица схемы, ее граф или структурное число, в определенной степени

препятствуют выявлению физической сущности поведения исследуемой схемы, удлиняя путь к ССФ. Математическая формулировка задачи символического анализа способна затемнить ее суть и привести к размножению вариантов решения, становящемуся самоцелью. При этом физическая сущность электрической цепи как объекта исследования отодвигается на второй план, а на первом плане возникают уже не электротехнические, а математические трудности, обусловленные издержками соответствующих аппаратов.

Матричный подход: достоинства и недостатки. Существующее многообразие матричных методов и координатных базисов для моделирования электрических цепей [149, 236] является скорее бедой, чем благом, поскольку обусловлено необходимостью поместить в «прокрустово ложе» матрицы физическую сущность электрической цепи, содержащей разнообразные элементы. Смешанные (контурно-узловые) координатные базисы [236] не приобрели популярности вследствие более сложных правил построения матрицы схемы по сравнению с однородными контурным и узловым базисами [231]. Наибольшее распространение получил модифицированный метод узловых напряжений, позволяющий учитывать управляемые источники (УИ) всех четырех типов и идеальные операционные усилители (ОУ) [51, 61, 211]. Однако искусственное введение токовых переменных в расширенный узловой координатный базис приводит к известным неудобствам при его использовании [51].

Избыточность матричного подхода заключается в том, что параметр элемента схемы может учитываться в матрице схемы более одного раза. Например, в случае анализа u -схем источником избыточности служит то обстоятельство, что параметры u -ветвей и источников тока, управляемых напряжением (ИТУН), ни один из узлов которых не является базисным узлом схемы, входят в матрицу узловых проводимостей 4 раза – 2 раза с положительным знаком и 2 раза с отрицательным [236].

Графовая модель как способ преодоления ограничений матриц. Модели схем в виде графов были призваны уменьшить избыточность матричных моделей, сделав переход к ССФ более простым и обусловленным структурой схемы. Операции над графами оказываются нагляднее соответствующих операций с матрицами. Однако все известные виды графов при отображении схемы с УИ оказываются неизоморфными ей. Это вынуждает использовать, наряду с изображением схемы, рисунок графа в качестве вспомогательной математической модели [249].

Однако отображение на графе активных элементов с помощью сигнальных или унисторных дуг неизбежно приводит к ССФ, содержащим дубликации, то есть избыточным ССФ. Избыточность графов активных подсхем вынуждает искать способы устранения дубликаций в процессе формирования ССФ, поскольку количество избыточных пар слагаемых в

выражении определителя графа достаточно сложной схемы может в несколько раз превышать число существенных слагаемых [238].

При использовании ненаправленного графа пассивной подсхемы удается исключить дубликации, обусловленные избыточностью представления пассивных элементов в матрице схемы. Например, появление дубликаций в выражении определителя двунаправленного (унисторного) графа обусловлено тем, что унисторные графы ИТУН содержат дуги как с положительным, так и отрицательным весом. В определителе гибридного графа дубликации образуются при отображении источников напряжения, управляемых напряжением (ИНУН), генератор и (или) приемник которых неинцидентны базисному узлу схемы, что может иметь место в практической схемотехнике. Оба предыдущих замечания можно отнести также к унисторно-сигнальному графу.

В общем виде проблема исключения дубликаций для унисторного и унисторно-сигнального графов решается на основе первоочередного выделения параметров пассивных ветвей по формулам Фойснера (1.1)–(1.2) [250]. Однако при реализации этого метода на компьютере приходится довольствоваться частичным устранением дубликаций вследствие высоких вычислительных затрат [151, 249]. Кроме того, используя унисторный граф, принципиально невозможно исключить все дубликации в случае отнесения дуг, отображающих некоторый ИТУН, к различным подсхемам.

Подобно матричным моделям, существенным недостатком графовых моделей схем является ограниченный набор типов пассивных элементов и УИ. Это способствовало и способствует «размножению» модификаций топологических формул, ориентированных на те или иные типы элементов схем [62, 76, 77, 106, 121, 227]. Ценность известных методик значительно снижает наличие каких-либо ограничений в базисе элементов, подлежащих учету. Графы нерегулярных для выбранного базиса УИ обладают, как правило, еще большей избыточностью, что является «ахиллесовой пятой» всех до сих пор разработанных обобщений [153]. Этому недостатка лишен обобщенный унисторный уз-граф, на котором предусматривается отображение нерегулярных УИ унисторно-подобными элементами [261]. Однако платой за такую возможность является необходимость рассмотрения 2^n производных графов (n – число нерегулярных УИ), и говорить об эффективности компьютерной реализации не приходится.

Теоретико-множественный подход для анализа разреженных структур. Элементы матрицы схемы, равные нулю, не отображаются на графе схемы, что важно для электрических цепей, которым присуща разреженность структуры. Исходной посылкой для разработки теоретико-множественного подхода также служило желание учесть это свойство электрических цепей, но не путем наглядного изображения ненулевых элементов матрицы схемы, а посредством списочного хранения этих

элементов и организации работы только с ненулевыми элементами. Такое усовершенствование матричного подхода в большей степени ориентировано на машинные выкладки, чем на использование человеком, поскольку применяется тяжеловесный теоретико-множественный аппарат и операция декартового произведения множеств.

Избыточность матричных моделей в полном объеме наследуется производными от них теоретико-множественными объектами, поскольку структурное или обобщенное число, по сути, является сжатой матрицей схемы. Например, в выражениях ССФ, формируемых на основе обобщенных чисел для у-схемы с ИТУН, присутствуют дубликации, обусловленные нерациональным учетом как пассивных, так и активных элементов схемы [243]. Эффективный алгоритм, не связанный с перебором слагаемых, для исключения этих дубликаций не известен.

Формирование ССФ с помощью матриц и графов значительно усложняется в случае схем с различными типами УИ, что поставило под сомнение привлекательность символьных методов для проектировщиков электрических цепей. Действительно, главными достоинствами символьно-топологических методов изначально (со времен Кирхгофа) являлись наглядность и удобство в применении. Методическая ценность матричного подхода к формированию ССФ оказывается более низкой, чем графового подхода, так как работа с символьными таблицами – занятие существенно более изнурительное, чем работа с числовыми матрицами.

Матрицы и графы – избыточное промежуточное звено в анализе цепей. Матрицы и графы, выступая в роли посредников, требуют за свои услуги существенно более высокой платы, чем снижение методической ценности соответствующих алгоритмов формирования ССФ. Основным недостатком матричных и графовых представлений – их избыточность приводит к тому, что количество дубликаций увеличивается экспоненциально с усложнением схемы, препятствуя формированию компактных ССФ и уменьшая сложность анализируемых схем.

Погрешность расчетов на основе избыточных ССФ может оказаться недопустимо высокой или привести к полному искажению результата, о чем пользователь компьютера может и не подозревать [243]. Неприятности дубликации доставляют при получении приближенных ССФ, значительно снижая надежность соответствующих программ символьного анализа, поэтому не ослабевает интерес к разработке методов формирования безыбыточных выражений схемных функций [153]. Важно подчеркнуть, что неустранимая погрешность возникает уже на этапе построения матрицы схемы, поскольку вычисление ее элементов проводится с конечным числом значащих цифр [211, 290]. Это относится не только к численному, но и к символьному анализу, так как элементы матриц будут вычисляться перед проведением других операций в выражениях ССФ.

Искать альтернативу матричному аппарату побуждает и то, что он не в полной мере позволяет учесть специфику электрических цепей, а именно, по знаку определителя матрицы узловых проводимостей или контурных сопротивлений нельзя судить об устойчивости частотно-независимых цепей [56]. С другой стороны, знак схемного определителя отражает эту фундаментальную характеристику активной электрической цепи [56].

Критические замечания в адрес методов, реализующих матричный, графовый и теоретико-множественный подходы, не означают принижения значения этих методов. Напротив, изучая зарубежные работы последних лет можно прийти к мысли, что значительному продвижению в области компьютерного символьного моделирования мы обязаны использованию математических аппаратов матриц и графов. Вместе с тем изложенное выше позволяет утверждать и то, что посреднические услуги матриц и графов не только отрывают нас от физических представлений, но и обходятся нам слишком дорого, препятствуя разработке универсальных и точных методов формирования ССФ электрических цепей.

2.3. Эволюция методов топологического анализа

Топологические методы анализа схем с управляемыми источниками. Между тем, методы анализа пассивных цепей постепенно, но неизбежно устаревали, появлялись новые типы компонентов электрических цепей. Создавались новые методы, базирующиеся на матричном, графовом и теоретико-множественном подходе, обобщающие результаты, полученные для символьного анализа.

В начале двадцатого века в электротехнике не применялись активные элементы, и не существовало понятия управляемого источника. Изучение вопросов анализа схем с УИ, используемых в моделях электронных ламп и транзисторов, началось лишь в середине 50-х годов. Фойснеру, который скончался в 1928 году [79, 80], не пришлось заниматься обобщением своего подхода.

Необходимость эффективных методов для анализа схем с УИ привела к обширным и многочисленным исследованиям, посвященным обобщению правил Кирхгофа и Максвелла. Начало этим исследованиям было положено работами Персиваля [73–75]. Вызывает удивление, что среди многих сотен публикаций по символьному анализу электрических цепей не наберется и десятка работ, посвященных развитию схемного подхода для анализа активных цепей.

Метод полных деревьев. В большинстве источников этот метод называется методом графов тока и напряжения или методом пары графов. Основоположителем метода был Персиваль [73]. Первоначально метод был разработан для y -схем с ИТУН [20], а впоследствии обобщен на схемы с другими типами УИ. Стержневой идеей этого метода является замена всех

пассивных элементов схемы, заданных проводимостями, вырожденными ИТУН, у которых управляемая (генератор) и управляющая (приемник) ветви параллельны. Полученная вспомогательная схема, содержащая исключительно ИТУН, является расчетной моделью метода С.Л. Коутса.

Полным деревом схемы Коутса называется связная подсхема, покрывающая все узлы исходной схемы. Для этого необходимо пронумеровать узлы полного дерева от 0 до $q-1$, узел с номером 0 считается базисным узлом. Генератор и приемник, относящиеся к одному ИТУН, должны иметь одинаковые порядковые номера. Алгоритм нахождения знака в предлагаемой здесь интерпретации содержит шаги: 1) $\sigma = 0$; 2) для каждого независимого узла $i = 1, 2, \dots, q-1$ выполнить три операции: а) найти путь от узла i к узлу 0 в дереве, образованном генераторами; если первый по порядку генератор пути (главный генератор) направлен от базисного узла, то $\sigma = \sigma + 1$; б) найти путь от узла i к узлу 0 в дереве, образованном приемниками; если первый по порядку приемник пути – главный приемник – направлен от базисного узла, то $\sigma = \sigma + 1$; в) из номеров главных генератора и приемника составить i -й столбец подстановки p ; 3) получить число инверсий l в подстановке p ; 4) найти знак определителя полного дерева по формуле $(-1)^{\sigma+l}$.

Определитель схемы Коутса получается как сумма определителей полных деревьев, которые можно выделить в этой схеме. Поэтому метод Коутса не позволяет выполнять автоматическую группировку и свертку слагаемых числителя и знаменателя для формирования ССФ в компактном виде. Применение этого метода для получения ССФ без помощи компьютера ограничивает также трудоемкая процедура нахождения знака полного дерева и то обстоятельство, что вспомогательная схема Коутса оказывается существенно более сложной, чем исходная схема, поскольку практические схемы содержат главным образом пассивные элементы, а не УИ. Многочисленным модификациям [61, 229] метода полных деревьев присущи аналогичные недостатки.

Метод Г. Возняцки [94] можно рассматривать как развитие метода Коутса. При этом вместо преобразования пассивных элементов схемы в вырожденные УИ используется обобщенная ветвь в виде соединения пассивного элемента с генератором УИ (при наличии последнего). В основе метода Возняцки лежит перечисление всех деревьев схемы, составленной из обобщенных ветвей. Каждое дерево дополняется приемниками УИ и находится определитель полученной схемы, которую назовем элементарной схемой Возняцки. Учет УИ в такой схеме подобен учету независимых источников в топологическом методе Кирхгофа, что придает методу Возняцки наглядность. Вместе с тем определитель элементарной схемы содержит в общем случае более одного слагаемого, а формула разложения определителя зависит от структуры этой схемы. Это,

с одной стороны, позволяет выносить за скобки произведения проводимостей ветвей соответствующего дерева, а с другой стороны, усложняет формализацию методики формирования ССФ.

Правило нахождения знака слагаемых определителей элементарных схем, в отличие от аналогичной процедуры Коутса, не имеет обоснования, хотя в [94] сообщалось о намерении автора сделать это в будущем. Возможно поэтому метод Вознячки не нашел последователей, хотя был опубликован как приложение в известной книге [99].

Метод цепей контуров передачи. Этот метод был разработан вслед за методами полных деревьев и выделения параметров [3, 52–56]. Сущность метода состоит в замене перечисления k -деревьев пассивной подсхемы перечислением цепей контуров передачи, относящихся ко всей схеме, то есть объединению ее активной и пассивной подсхем. Понятие цепи контура передачи, предложенное Хоаном [52], обобщает понятие контура передачи, введенное Фойснером (1.7). Подобно методу выделения параметров, данный метод позволяет получать вложенные выражения символьных схемных функций.

В основе метода лежит идея, которую можно интерпретировать как правило последовательного возбуждения УИ. Дело в том, что в схеме с УИ могут быть образованы контура передачи, содержащие генератор и приемник одного из УИ или различных УИ. В последнем случае возникает цепь контура передачи, образованная двумя и более звеньями, которая соответствует некоторой подстановке из генераторов и приемников УИ, используемых в этом контуре. Это указывает на связь данного метода с методом полных деревьев. Многозвенную цепь контура передачи начинает генератор одного из УИ, который возбуждает приемник другого УИ. Следующее звено начинается генератором того УИ, приемник которого был возбужден в предыдущем звене и т.д. Приемник последнего звена и генератор первого звена обязательно принадлежат одному и тому же УИ схемы, чтобы замкнуть цепь.

После нахождения некоторой цепи контура передачи строится производная схем, образованная в результате стягивания всех ветвей цепи. Если эта схема не содержит УИ, то ее определитель раскрывается по формулам Фойснера (1.1)–(1.2), что обеспечивает снижение трудоемкости выкладок и экономию вычислительных операций в выражениях ССФ. Очевидно, что некоторому коэффициенту при произведении параметров ИТУН в общем случае соответствует более одной цепи, составленной из генераторов и приемников этих ИТУН. Знак цепи учитывает ориентацию генератора и приемника в каждом ее звене. Таким образом, можно установить связь между методом цепей контуров передачи и методикой Ю.П. Галямичева, основанной на выявлении путей тока от входа к выходу схемы и поворот фазы [122].

Несмотря на прозрачный физический смысл, методики Дж.Т.Барроуза [3] и Хоана [52], реализующие метод цепей контуров передачи, так и не получили сколько-нибудь заметного критического обсуждения и развития за рубежом. Первые ссылки на работы Барроуза и Хоана в отечественной литературе относятся к 90-м годам [254, 255, 258]. По-видимому, сказалось то обстоятельство, что, как и метод Возняцки [94], данный метод не имеет строгого доказательства, хотя следует отдать должное попытке Хоана дать топологическое обоснование своему методу на основе введенного с этой целью понятия «регулярное множество циклов» [54].

Методика Барроуза требует исследования всех возможных перестановок генераторов и приемников УИ [3]. Однако лишь незначительная часть из этих перестановок соответствует цепям контуров передачи, то есть слагаемым коэффициентов при произведениях параметров УИ [61]. Методика Хоана лишена этого недостатка, поскольку предусматривает неявное разложение определителя схемы по параметрам УИ путем нахождения цепей контуров передачи, действительно имеющих в схеме. Важным достоинством методики Хоана является возможность ее использования для анализа схем, содержащих как проводимости, так и сопротивления, а также УИ всех четырех типов [52]. Кроме этого, Хоаном разработаны специализированные методики для схем с взаимными индуктивностями [53] и идеальными ОУ [55].

Отсутствие алгоритма для нахождения цепей контуров передачи создает трудности в компьютерной реализации. В то же время метод выделения параметров по Ю.П. Галямичеву был реализован в машинной программе [96]. При нахождении цепей контуров передачи вручную оказывается, что в случае схем с несколькими УИ методики Барроуза и Хоана, подобно методу Возняцки, утрачивают свою наглядность. Существенно затрудняет использование этих методик наличие тождественных цепей контуров передачи, имеющих различную структуру [3, 54]. Результатом этого является снижение достоверности расчетов вследствие возможности пропуска слагаемых числителя или знаменателя ССФ. Наконец, понятие цепей контуров передачи, как и понятие многократного суммарного алгебраического дополнения, по определению отрицают деление схемы на подсхемы, что требует дополнительных исследований в направлении анализа схем по частям с помощью соответствующих методов.

Практическую ценность методик Барроуза и Хоана, как и методики Ю.П. Галямичева, снижает также необходимость определения знака для каждого произведения параметров УИ. Этого не требуется, например, в методе обобщенного унисторного графа [261], когда параметры УИ учитываются в произведении со своими знаками. Особое внимание следует уделить корректности соответствующих правил [3, 520]. Как ранее указывалось [261], правило для нахождения знака, используемое Хоаном и

предусматривающее учет совместной ориентации генератора и приемника в каждом звене цепи, противоречит методу унитарного графа. Это объясняется тем, что Хоан не учитывает количества цепей контуров передачи, относящихся к некоторому слагаемому схемного определителя.

Вместо правила Хоана следует использовать правило, сформулированное Вангом для схем с трехполюсными УИ [89], после необходимого обобщения. Для этого обратим внимание на то, что структура цепей контуров передачи аналогична системе некасающихся контуров в сигнальном графе [62]. Следовательно, знак соответствующего слагаемого определителя схемы (графа) должен зависеть не только от совместной ориентации генератора и приемника в звеньях цепи контуров передачи (от знаков весов контуров), но и от числа звеньев в цепи (числа контуров в системе) [254].

Несмотря на недостаточную обоснованность методик Хоана и Барроуза, само понятие цепи контуров передачи имеет важное методологическое значение. В частности, полное дерево Коутса по существу представляет собой единственную из цепей контуров передачи, определитель производной схемы для которой равен единице. Элементарная схема Вознячки, которая соответствует коэффициенту при некотором произведении параметров УИ, содержит в общем случае несколько цепей контуров передачи, в результате стягивания ветвей каждой из которых получается одна и та же схема-дерево, содержащая только пассивные элементы. С точки зрения Ю.П. Галямичева, пассивные ветви, входящие в состав цепи, образуют k -дерево соответствующего вида. Без использования понятия цепи контуров передачи оказалось невозможно обобщить метод изоморфного графа [241, 242] (под которым понимается у-схема с ИТУН).

Матрично-топологический метод выделения параметров. Советский исследователь Ю.П. Галямичев первым получил схемное решение задачи формирования ССФ, предусматривающее анализ непосредственно схемы с ИТУН и пассивными элементами, выраженными проводимостями [156]. Суть его идеи состояла в том, что вначале определитель активной схемы освобождается от элементов, вносящих в него несимметричность, то есть от ИТУН, а затем выражается через деревья пассивных схем, производных от пассивной подсхемы исходной схемы. Таким образом, определитель схемы представляется в виде суммы 2^n слагаемых, где n – число ИТУН в схеме. Каждое слагаемое соответствует некоторому сочетанию из параметров ИТУН. Произведение параметров сочетания умножается на коэффициент, учитывающий параметры пассивных ветвей, который можно найти, анализируя структуру пассивной подсхемы, поскольку удаление ИТУН не приводит к объединению узлов схемы.

В основе этого метода лежит связь между минорами матрицы узловых проводимостей схемы и ее k -деревьями [253]. Коэффициенты при произведениях параметров ИТУН выражаются через сумму k -деревьев соответствующего вида.

Следует обратить внимание на то, что в 1960 году (то есть двумя годами позже Ю.П. Галямичева [122]) Мейсон опубликовал лишь частную формулу для разложения определителя схемы с одним трехполюсным ИТУН [231]. В формуле Мейсона коэффициент при параметре ИТУН находится посредством перечисления путей между узлом a приемника и узлом b генератора этого ИТУН. Учитываемые пути не должны проходить через общий узел c генератора и приемника. Это соответствует перечислению 2-деревьев вида (c, ab) , то есть частному виду k -деревьев, которые использовал Ю.П. Галямичев для выделения двух, трех и более параметров ИТУН, что доказывает приоритет советской электротехнической школы.

Для нахождения знака k -деревьев Ю.П. Галямичев использовал понятие «поворот фазы сигнала» [122]. Правило знаков Ю.П. Галямичева доказывается на основе топологической процедуры Коутса [20]. Однако при использовании этого правила для анализа схем с четырехполюсными ИТУН теряется наглядность и затрудняется формализация методики получения ССФ. Дать строгое матричное обоснование методики Ю.П. Галямичева позволила теорема об определителе суммы двух матриц, доказанная В.П. Сигорским [230]. Эта теорема и введенное им же понятие суммарного алгебраического дополнения в совокупности предоставили весьма плодотворный аппарат для анализа пассивных и активных электрических цепей через выделение параметров, расчета чувствительностей к их изменению, получения полиномиальных коэффициентов и т.д.

Использование суммарного алгебраического дополнения вместо миноров матрицы и правила нахождения знака многократных алгебраических дополнений вместо правила «поворота фазы» позволили упростить и формализовать методику Ю.П. Галямичева, что было сделано в работах Ю.М. Калниболотского [164, 165]. Определитель схемы через суммарное алгебраическое дополнение представляется в виде

$$\Delta = \Delta^{1,2,\dots,n} + \sum_{i=1}^n s_i \Delta_{(a_i+b_i)(c_i+d_i), (a_j+b_j)(c_j+d_j)+\dots} + \\ + s_1 s_2 \dots s_n \Delta_{(a_1+b_1)(c_1+d_1), (a_2+b_2)(c_2+d_2), \dots, (a_n+b_n)(c_n+d_n)}, \quad (2.1)$$

где $\Delta^{1,2,\dots,n}$ – определитель схемы, образованной из исходной схемы в результате удаления ИТУН с параметрами s_1, s_2, \dots, s_n ; a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – соответственно номера узлов подключения генератора и приемника ИТУН с номером i ; $\Delta_{(a_i+b_i)(c_i+d_i)}$ – суммарное алгебраическое дополнение, образованное в результате следующих преобразований над

определителем матрицы проводимостей исходной схемы: 1) поэлементное прибавление строки a_i к строке b_i , а столбца c_i к столбцу d_i ; 2) удаление строки a_i и столбца c_i ; $\Delta_{(a_1+b_1)(c_1+d_1), (a_2+b_2)(c_2+d_2), \dots, (a_n+b_n)(c_n+d_n)}$ – n -кратное суммарное алгебраическое дополнение, образованное n -кратным применением этих преобразований. Операция удаления i -го ИТУН ($s_i=0$) заключается в удалении его генератора и приемника из исходной схемы.

Различным вариантам этого метода посвящены работы зарубежных авторов [3, 54, 55, 61, 94]. В.И. Анисимову и Н.Г. Козьмину [96] удалось обобщить методику Ю.П. Галямичева для схем со всеми типами УИ и установить ее связь с методом полных деревьев Коутса. Это позволило перенести центр тяжести с матрично-топологической интерпретации Ю.М. Калниболотского на схемную интерпретацию Ю.П. Галямичева, который изначально ставил своей целью нахождение ССФ непосредственно из самой схемы без использования матриц.

Теоретико-множественная интерпретация метода выделения параметров, предложенная Беллертом [3], не только не способствовала продвижению к этой цели, но и удаляла от нее по сравнению с более наглядной и общепринятой матричной интерпретацией.

В предельном случае формулы (2.1), когда параметры всех элементов схемы выделяются в явном виде, метод выделения параметров переходит в так называемый множественно-топологический метод [235], который предусматривает перебор всех сочетаний из числа элементов схемы по $q-1$. Это напоминает перебор сочетаний для поиска деревьев в неориентированном или унисторном графах схемы [228]. Однако в случае перебора элементов схемы с ИТУН для отбраковки сочетаний, не образующих слагаемых определителя, приходится не выявлять контур в графе, а находить величину суммарного алгебраического дополнения, которая может быть равна: -1 , 0 или 1 . Нетрудно убедиться, что сочетание элементов, для которого суммарное алгебраическое дополнение отлично от нуля, соответствует полному дереву Коутса.

Известны более эффективные, чем алгоритм из [235], алгоритмы нахождения знака [161]. Однако и они не обеспечивают существенного выигрыша в числе операций по сравнению с топологической процедурой Коутса, при использовании которой совместно с формулой (2.1) реализуются такие преимущества схемного подхода, как наглядность выкладок и отсутствие вспомогательных алгебраических объектов.

Трудностей, связанных с нахождением знака многократных суммарных алгебраических дополнений, можно избежать, если после выделения очередного параметра выполнять перенумерацию узлов в схеме, соответствующей однократному дополнению. При этом определение знака у произведения выделяемых параметров заменяется учетом знака при каждом из них. Такая возможность реализована в матричном методе выделения параметров [61], который был предложен Лином спустя десять

с лишним лет после опубликования результатов Ю.П. Галямичева. Для разложения определителя матрицы узловых проводимостей по Лину рекурсивно применяется следующая формула [61]

$$\Delta = (-1)^{a+c} s \Delta_{(a+b)(c+d)} + \Delta(s=0), \quad (2.2)$$

где s – параметр выделяемого ИТУН; a, b, c, d – соответственно номера узлов подключения его генератора и приемника; $\Delta_{(a+b)(c+d)}$ – суммарное алгебраическое дополнение; $\Delta(s=0)$ – определитель матрицы схемы при $s=0$, то есть нейтрализации ИТУН.

Формулу (2.2) нельзя считать прямым обобщением формулы (1.2) [59] по двум причинам: 1) схема по сравнению с матрицей является топологическим объектом; 2) в формуле (2.2) не используется схемное отображение алгебраического дополнения.

При использовании формулы (2.2) обеспечивается существенное уменьшение вычислительной сложности формируемых вложенных выражений ССФ по сравнению с формулой (2.1) [246]. Платой за это является трудоемкая перенумерация строк и столбцов матрицы, производной от исходной матрицы схемы и соответствующей суммарному алгебраическому дополнению $\Delta_{(a+b)(c+d)}$. В схемной интерпретации матричного метода, также предложенной Лином [61], осуществляется выполнение операций, предусмотренных в формуле (2.2), на схемном уровне. Для этого, в частности, проводится перенумерация узлов производных схем, образующихся при каждом применении формулы (2.2).

Таким образом, в формуле (2.2) используется простое алгебраическое правило знаков, опирающееся на порядковую нумерацию узлов исходной схемы и производных от нее схем. Однако схема по сравнению с матрицей является топологическим объектом, в котором номера или буквенные обозначения узлов должны служить лишь для указания соединений элементов. Например, в топологической процедуре Коутса вместо номеров узлов можно использовать их буквенные обозначения, поскольку знак полного дерева не является функцией от номеров узлов. Следовательно, метод выделения параметров Лина нельзя рассматривать как схемное решение задачи формирования ССФ.

Сравнение формул (2.1) и (2.2) заставляет усомниться в корректности применения этих формул для выделения параметров УИ различных типов. Дело в том, что предусматриваемое при использовании этих формул нахождение знаков многократных суммарных алгебраических дополнений не позволяет, выделив один из УИ, сразу же забыть о его существовании, как это допускает формула (2.2).

Методы схемных преобразований. К числу наиболее разработанных методов относятся методы схемоанализа (автор М.А. Шакиров) [287–289], буквенно-полиномиальной (автор Р. В. Дмитришин) [153] и схемной редукции (автор Э.А. Лаксберг) [211]. Эти методы используют

единственную схему замещения, которая упрощается в результате последовательности эквивалентных преобразований до получения искомого решения. Расчетные формулы аналогичны по структуре формулам исключения Гаусса, поэтому можно говорить, что методы схемоанализа и схемной редукции реализуют схемный подход по Гауссу.

Если все параметры исходной схемы задать символами, то искомая ССФ находится в виде последовательных выражений, отображающих выполняемые схемные преобразования. Из последовательного выражения может быть получено единое выражение ССФ с одной операцией деления. Однако в проведении столь трудоемких алгебраических преобразований нет необходимости, поскольку формирование единых выражений ССФ более эффективно выполняется методами, реализующими схемный подход по Крамеру. Вычислительная сложность символьной последовательности выражений оказывается, как правило, ниже сложности соответствующего единого выражения, поэтому последовательность выражений рассматривается как форма представления ССФ, альтернативная традиционной форме (1.6) [71, 81].

Методы схемоанализа, или общей теории преобразования электрических схем, предусматривают мышление схемными образами и являются инструментом для исследования сложных электрических цепей по частям [287–289]. Важно, что восприятие этих методов переводится на более высокую ступень мыслительных операций по сравнению с абстрактным языком алгебраических действий. В основе схемоанализа лежат понятия обобщенно-последовательного или обобщенно-параллельного соединения элементов схемы. При этом схемная модель рассматривается как схемное уравнение в схемных символах, а решение схемного уравнения достигается упрощением обобщенно-последовательных или обобщенно-параллельных соединений элементов схемы. Результатом упрощения обобщенно-параллельных соединений хорд с ветвями дерева в z -схеме является схема-дерево, параметрами которой служат входные и передаточные сопротивления, то есть ССФ в форме последовательности выражений [287]. Выражения для вычисления новых параметров ветвей дерева после «растворения» в них некоторой хорды содержат операции вычитания и деления, что обуславливает формальное сходство методов схемоанализа с методом исключения Гаусса.

Методы схемной редукции [211] предусматривают последовательное упрощение схемы путем исключения узлов или контуров до получения простейшей схемы, анализируемой по закону Ома, и последующее восстановление промежуточных схем для нахождения напряжений или токов. Это соответствует прямому и обратному ходам в методе Гаусса. Формулы редукции не содержат операций вычитания. Тем не менее, их можно рассматривать как схемную интерпретацию алгоритма Гаусса, когда используются неопределенные матрицы узловых проводимостей или

контурных сопротивлений, а элементы главной диагонали вычисляются через недиагональные элементы соответствующих строк или столбцов.

Таким образом, методы схемной редукции обеспечивают формирование последовательности выражений, в которых устранены операции вычитания, обусловленные избыточностью представления пассивных и активных элементов в матрице схемы, что позволяет существенно повысить точность расчетов [211]. При этом допускается использование всех типов УИ и идеальных ОУ. Вопросы устранения дубликаций и обобщения на все типы элементов для метода преобразования обобщенно-параллельных соединений z -схем обсуждались в работе [161]. Однако безизбыточные выражения оказываются весьма громоздкими, что затрудняет их программирование и делает непригодными при получении ССФ без помощи компьютера. Потенциально методы схемной редукции следует признать более устойчивыми к численным расчетам, поскольку их реализуют формулы, не содержащие операций вычитания. Такие операции появляются лишь при наличии в схеме параметров, имеющих отрицательные значения, и при учете ориентации ветвей УИ.

Известно, что при раздельном нахождении числителя и знаменателя ССФ можно достичь более высокой точности, чем в случае представления ССФ последовательностью выражений, отображающей процесс численного решения системы линейных алгебраических уравнений схемы [84, 85, 94]. В этом можно убедиться, воспользовавшись одной из программ численного анализа [81, 174] и выполнив вычисления с ограниченной разрядностью, представив числитель и знаменатель ССФ в виде определителей, которые раскрываются методом Гаусса (в первом случае) или при решении системы уравнений также методом Гаусса (во втором случае).

Раздельное нахождение числителя и знаменателя ССФ обеспечивается при использовании метода матрицы алгебраических дополнений [234], который в схемной интерпретации можно рассматривать как развитие методов схемоанализа. Таким образом, можно считать, что классические методы схемоанализа (метод матрицы алгебраических дополнений) реализуют схемный подход по Гауссу (Крамеру).

Методы схемных преобразований предусматривают непрерывное изменение как структуры схемы, так и значений параметров ее элементов. При этом в процессе упрощения исходной схемы обязательно появляются новые управляющие связи (новые ненулевые элементы в матрице алгебраических дополнений) и объем выкладок, требуемых для упрощения очередной схемы, может превысить трудоемкость упрощения схемы.

В случае использования метода выделения параметров Фойснера по формулам (1.1) и (1.2) производные схемы всегда оказываются проще породивших их схем, а параметры всех элементов остаются без изменения.

Важно, что мышление сосредоточивается на анализе структуры этих схем, а решение задачи формирования ССФ является топологическим. В методах схемных преобразований, напротив, центр тяжести (трудоемкости расчетов) переносится с созерцания структуры схем на пересчет их параметров. При этом вычисления оказывается удобно проводить с помощью вспомогательных матриц [234], что отрицает саму идею схемного подхода.

В отличие от методов полных деревьев и выделения параметров методы схемных преобразований легко обобщаются для анализа подсхем и их иерархического объединения до получения параметров исходной схемы [287].

Развитие схемного подхода в диакоптике. Потребность в анализе сложных электрических цепей и повышении его эффективности обусловили интерес исследователей в конце 60-х – начале 70-х годов к диакоптической идее, предусматривающей сведение задачи анализа схемы к трем подзадачам: 1) расчленение схемы на части; 2) анализ каждой части в отдельности; 3) объединение результатов анализа подсхем.

К заслугам Ю.П. Галямичева можно отнести обобщение формул бисекции по двум узлам Фойснера (1.4) и (1.5). В частности, он привел диакоптическую формулу схемного определителя для случая, когда пассивная схема делится на две подсхемы по узлам a , b и c [122]. Эта формула в принятой здесь символике [122] имеет вид

$$\Delta = \Delta_1(a,b,c) \Delta_2 + \Delta_1 \Delta_2(a,b,c) + \Delta_1(a,cb) \Delta_2(b,c) + \Delta_1(b,ca) \Delta_2(a,c) + \Delta_1(c,ab) \Delta_2(a,b). \quad (2.3)$$

Здесь $\Delta_1(a,b,c)$ и $\Delta_2(a,b,c)$ – определители схем, образованных из первой и второй подсхем в результате объединения внешних узлов. $\Delta_1(a,cb)$, $\Delta_1(b,ca)$, $\Delta_1(c,ab)$ – сумма определителей 2-деревьев первой подсхемы, содержащих путь между узлами c и b , c и a , a и b соответственно. Оставшиеся сомножители в формуле (2.3) находятся аналогично сомножителям в формуле (1.4).

Обобщение формулы (2.3) стало возможно после разработки метода унисторного (двунаправленного) графа. Значительных успехов в топологическом анализе схем по частям добились исследователи львовской школы [23, 24]. Ими был разработан способ расчленения графа на части по ветвям [23]. Обобщающий его способ расчленения графа на части по узлам [26] использует внешнюю характеристику подграфа как множество D -деревьев, т.е. деревьев, имеющих одинаковые пути относительно внешних узлов этого подграфа. При сочленении подграфов необходимо проверять выбранные сочетания D -деревьев на соответствие свойствам дерева первоначального графа. Это приводит к усложнению заключительного этапа анализа по частям.

По-видимому, наличие побочных сочетаний обуславливает то обстоятельство, что наименьшие вычислительные затраты достигаются при расчленении графа на элементарные подграфы – узлы с инцидентными ветвями, отдельные ветви, т.е. при использовании процедуры наращивания. Это показало исследование машинных программ, реализующих метод D -деревьев. Существенно, что процедура наращивания позволяет также исключить первый, подготовительный этап диакоптического подхода. Как видно, полезные свойства указанной процедуры были выявлены уже В. Фойснером (см. подраздел 1.5 положения 2 и 3), который представил свои методы (методы разложения определителя по Y -узлу для Y -схем и Z -узлу для Z -схем) в такой форме, чтобы оказалось возможным последовательно добавлять к некоторой начальной подсхеме по одному узлу.

Метод D -деревьев был реализован в наиболее эффективных для того времени программах [81, 292]. Однако даже возможности современных персональных компьютеров таковы, что максимальное количество внешних узлов подграфа для метода D -деревьев не может превышать семи [176]. Достоинством метода D -деревьев является то, что знаки перед слагаемыми диакоптических формул всегда положительные. Однако наличие в унисторных графах активных схем дуг одного веса, но с разными знаками, приводит к образованию дубликаций как на уровне построения D -деревьев подсхем, так и на уровне их объединения. Кроме того, D -дерево графа одной подсхемы оказывается в общем случае совместным с несколькими D -деревьями графа другой подсхемы. Это приводит к значительному увеличению числа слагаемых в диакоптической формуле по сравнению с числом D -деревьев подграфов.

2.4. Попытки развития схемного подхода Фойснера

Значение идеального усилителя Теллегена в истории развития схемного подхода. Как показали последние исследования [219, 221], наиболее эффективным для символьного анализа активных ЛЭЦ явилось использование обобщений идеального усилителя Б.Д.Г.Теллегена [84, 85].

Теллеген исследовал идеальный усилитель как новый схемный элемент, дал пример триода, где наклон характеристики g_m и коэффициент усиления напряжения μ устремляются к бесконечности. Если $g_m \rightarrow \infty$ и $\mu \rightarrow \infty$, то получается $i_g=0$ и $v_g=0$ [83, с. 143]. В 1948 году Теллеген описал идеальный гиратор как пятый пассивный элемент [84]. После четырех канонических управляемых источников: источника напряжения, управляемого током (ИНУТ), источника тока, управляемого током (ИТУТ), ИТУН и ИНУН, идеальный усилитель Теллегена является пятым активным элементом, который также является «математическим понятием без физического содержания» [85, с. 467]. Идеальный усилитель Теллегена однозначен УИ при устремлении их параметров к бесконечности. Б.

Теллеген не предложил какого-либо условного графического обозначения идеального усилителя.

Г.Дж. Карлин одним из первых оценил значение идеального усилителя Теллегена [12, 13], дав ему название – нуллок (рис. 2.1, а). Нуллок является аномальным управляемым источником, поскольку ток и напряжение норатора (генератора нуллора) не определены, а ток и напряжение нуллатора (приемника нуллора) равны нулю. Ненаправленные нуллоеры применяются для матричного анализа [214], синтеза [105] и расчета параметров [6, 7, 232] электрических цепей.

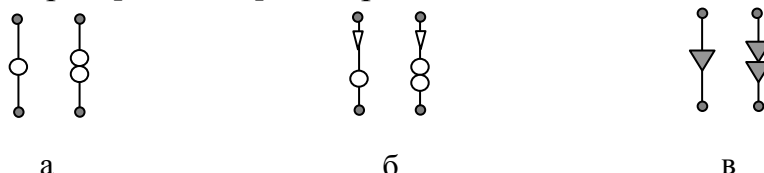


Рис. 2.1. Нуллок Теллегена (а), ориентированный нуллок Брауна (б) и НУИ (в)

Список публикаций по нуллокной тематике, начало которому положила работа Теллегена [83], приведенный в [53] насчитывает 355 названий.

Ориентированный нуллок Я. Брауна. Появление схем, состоящих, как из элементов R , L , C , так и нуллоеров, потребовало разработки нового топологического метода анализа. В силу правила Крамера знаменатель передаточной функции равен определителю схемы, дополненной по виду функции на входе и выходе стянутой или разомкнутой ветвью. Числитель передаточной функции равен определителю схемы, дополненной норатором на входе и нуллатором на выходе. Таким образом, схемами числителя и знаменателя можно представить произвольные функции для схем с любыми элементами.

Числитель передаточных функций схем с элементами R , L , C в общем случае может содержать не только положительные, но и отрицательные члены. Для того чтобы различать положительные и отрицательные члены, Яромир Браун в 1965 году на симпозиуме в Праге «Летняя школа по теории цепей» (Symposium «Summer Scholl on Circuit Theory», Prague, 9.09.–15.09.1965) предложил понятие ориентированного нуллора [8] (рис. 2.1,б), что позволило выразить символьные схемные функции через определители схем с нораторами и нуллаторами, а также применить формулы Фойснера (1.1)–(1.2) для анализа электрических цепей, содержащих идеальные ОУ. Впоследствии результаты Брауна были опубликованы в работе [9], написанной на чешском языке с аннотацией и подписями к рисункам, выполненными на английском языке.

Почти одновременно с Брауном ориентированные нуллаторы и нораторы использовал А.Г. Давиес [22]. Однако доклад Брауна на симпозиуме в Праге состоялся на полгода раньше, а его статья [8], опубликованная в том же журнале и том же году, что и статья Давиеса, содержала более общие и далеко идущие результаты. К сожалению, ни

статья Давиеса [22], ни работы Брауна [8–10], не получили дальнейшего развития. Следует отметить, что о приоритетной работе [8] чехословацкого ученого В. Филаретов узнал только в 2001 году от своего официального оппонента – известного специалиста в области теории цепей А.В. Бондаренко, опубликовавшего ряд работ по нулловой тематике [6, 7].

Трактовка схемного подхода Брауна отличается оригинальностью [10]. Если обозначить j как вход и k как выход четырехполюсника, то определитель равен $D_{(kj)}^j$, когда на входе включен норатор, ориентированный по напряжению, и определитель равен $D_j^{(kj)}$, когда ко входу подключен норатор, ориентированный по току. Оба определителя связаны тождеством:

$$D_{(kj)}^j = -D_j^{(kj)}. \quad (2.4)$$

Математическая модель схемы электрических цепей, составленных из элементов R , L , C , НУ, НО, образована из двух подсистем уравнений. Первая подсистема уравнений получается из законов Кирхгофа

$$Ai=0, Bu=0, \quad (2.5)$$

где $A=[1, \Lambda]$ – матрица сечений и $B=[\Lambda^t, 1]$ – матрица контуров.

Вторую подсистему уравнений образуют компонентные уравнения

$$i=Yq, \quad u=Zq, \quad (2.6)$$

где q – вектор управляющих переменных, являющихся токами и напряжениями.

Уравнения (2.6) в общем случае позволяют задать произвольные линейные элементы, включая управляемые источники. В случае RLC -схем матрицы Y и Z являются диагональными. При наличии нуллора с норатором, ориентированным по току, ненулевой элемент матрицы Y находится на диагонали, а соответствующий ненулевой элемент матрицы Z помещен вне диагонали. В случае нуллора с норатором, ориентированным по напряжению, наоборот, ненулевой элемент матрицы Z помещается на диагонали, а ненулевой элемент матрицы Y вне диагонали. После подстановки уравнений (2.6) в (2.5) получается матричное уравнение

$$Mq=0, \quad (2.7)$$

где $M=[AY \ BX]^t$ – квадратная матрица.

Тождество в уравнении (2.7) означает, что отклонение на любом входе или выходе схемы должно быть сразу где-то скомпенсировано. Это следствие уравнений Кирхгофа, потому что потенциалы в узлах схемы, магнитное поле контуров выравниваются во много раз быстрее по сравнению с остальными процессами в схеме.

Пусть $\det M=D$ – определитель матрицы M или схемный определитель. Определитель D является мультилинейной функцией элементов матриц Y и Z . Из этого в случае неособенных элементов цепи следует

$$D = \frac{\partial D}{\partial y_j} y_j + \frac{\partial D}{\partial z_j} z_j, \quad (2.8)$$

где $\frac{\partial D}{\partial y_j} y_j$ – определитель схемы со стянутой ветвью j , $\frac{\partial D}{\partial z_j} z_j$ – определитель схемы с удаленной ветвью j .

Примечательно, что формула Брауна (2.8) включает в себя обе формулы Фойснера (1.1) и (1.2) для выделения сопротивления и проводимости [32, 36]. В случае выделения сопротивления принимается $y_j=1$, а проводимости – $z_j=1$.

Решение системы (2.6) требует, чтобы определитель D и все его частные производные первой и высших степеней были нулевыми. Это служит основой изложенного в работе [10] альтернативного способа вычисления определителей матриц четырехполюсников и матриц схем с больше чем двумя входами.

Сопоставим определителю D_j^k определитель $D_j^{(kj)}$:

$$D_j^k = \begin{bmatrix} \dots & A_i & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & B_k & \dots \end{bmatrix}, \quad D_j^{(kj)} = \begin{bmatrix} \dots & A_i & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & B_j & \dots \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

а определителю D_k^j – определитель $D_{(kj)}^j$:

$$D_k^j = \begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots & A_k & \dots \\ \dots & B_j & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix}, \quad D_{(kj)}^j = \begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots & A_j & \dots \\ \dots & B_j & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

где A_j и A_k – столбцы матрицы A , а B_j и B_k – столбцы матрицы B .

Из сравнения (2.9) и (2.10) следует, что определители $D_{(kj)}^j$ и $-D_j^{(kj)}$ отличаются только тем, что переставлены столбцы j и k . Это доказывает выражение (2.4).

Топологические условия разрешимости и вырождения активных электрических цепей. Еще в работах Фойснера было установлено условие вырождения пассивных схем в случае, когда они образуются из двух и более несвязных подсхем. В работах М.М. Милика [64, 66] и Т. Озавы [70] были исследованы топологические условия разрешимости и вырождения активных электрических цепей, а также предложен критерий определения порядка сложности электрических цепей.

В работе Озавы [70] проблема разрешимости линейных цепей рассматривается с топологической точки зрения при использовании метода пары графов (графа тока-напряжения). Топологическим условием разрешимости схемы полагается существование полного дерева графа напряжений и графа токов. В случае если полного дерева не существует, предлагается разбиение исходного графа на подграфы, с целью определения подграфа, структура которого приводит к вырождению всю

схему. Озава сформулировал условия разрешимости только схем на УИ, указав, что они могут применяться также и для схем замещения активных цепей с использованием нораторов и нуллаторов [70].

Использование графа тока и напряжения не позволило Озава непосредственно исследовать схемы, содержащие ИТУТ и ИНУН, что усложнило его методику. Озава предложил следующие топологические условия вырождения электрической схемы: наличие контуров, состоящих из ветвей источников напряжения УИ и (или) ветвей приемников тока (рис. 2.2,а–б), и (или) сечений, образованных ветвями источников тока УИ и (или) ветвями приемников напряжения графа G (рис. 2.2,в–г).

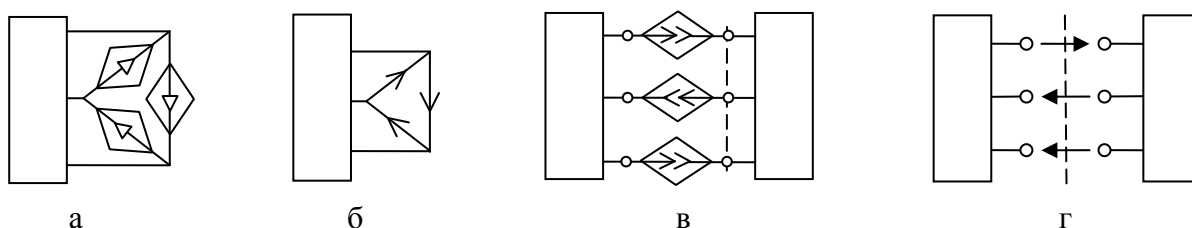


Рис. 2.2. Условия вырождения активных схем

Во многих случаях существование полного дерева можно проверить по предложенным условиям, но для схем, в которых модели активных элементов представлены с помощью нораторов и нуллаторов, такой проверки будет недостаточно. Впоследствии, уже в рамках метода схемных определителей, было указано на следующее свойство аномальных элементов: норатор ведет себя одновременно и как генератор напряжения, и как источник тока, а нуллатор – как приемник тока и напряжения [275], что иллюстрирует табл. 2.1 [281].

Таблица 2.1. Условия вырождения схемы и нейтрализации элементов при замыкании и размыкании ветвей

Элемент схемы	Петля	Разомкнутая ветвь
y -ветвь	Нейтрализация	Выделение y
z -ветвь	Выделение z	Нейтрализация
Генератор E	Вырождение	Нейтрализация
Приемник I	Вырождение	Нейтрализация
Генератор J	Нейтрализация	Вырождение
Приемник U	Нейтрализация	Вырождение
Норатор	Вырождение	Вырождение
Нуллатор	Вырождение	Вырождение

Миликом были предложены следующие условия существования единственного решения: 1) если схема N , состоящая из двухполюсных элементов и гираторов, имеет единственное решение, то она должна образовывать полное дерево (Теорема 1 [66, стр. 180]); 2) если N не

содержит сечений и контуров, образованных гираторами, то схема имеет единственное решение (следствие 2 [66, стр. 180]).

Таким образом, если данная схема содержит контура (сечения) из генераторов напряжения (тока), то единственного решения задачи анализа схемы не существует. В то же время если источники не оказывают влияния на параметры и характеристики схемы, то они могут быть нейтрализованы.

Схемно-матричный подход к символьному анализу сложных электрических цепей. Топологический подход к анализу электрических цепей постепенно развивался, появлялись новые более совершенные методы, но по-прежнему сохранялась проблема их низкой эффективности вычисления схемных функций по сравнению с традиционными численными методиками. Для решения этой проблемы некоторые специалисты использовали декомпозиционный подход [15, 51, 81]. Так, в ходе исследований способов повышения производительности программы символьного анализа *Spice* [92], С.М. Чанг и Г.М. Вижба разработали новый метод нулловой декомпозиции [15].

Чанг и Вижба называют «схемным определителем» определитель матрицы проводимостей [15, с. 701]. Для достижения единственности определителя узлы соответствующей схемы N нумеруются последовательно, начиная с базисного, обозначенного как «0». Разрешаются преобразования матрицы проводимости путем объединения столбца (строки) имеющего больший номер со столбцом (строкой) имеющим меньший номер.

Подход Чанга и Вижбы не является схемно-топологическим, поскольку используется нумерация узлов. Возникает проблема нахождения знаков. Для ее решения вводятся индексы узлов. Индекс u узла p является числом нулловых деревьев, которые соединяются с узлами, чей узловой номер меньше наименьшего из номеров узлов нулловатного дерева, подключенного к узлу p в схеме N . Узел, не соединенный ни с одним нуллатором, называется пустым нуллаторным деревом. Индекс o узла p является числом нораторных деревьев, которые соединяются с узлами, чей узловой номер меньше наименьшего из номеров узлов нораторного дерева, подключенного к узлу p в схеме N . Узел, не соединенный ни с одним норатором, называется пустым нораторным деревом.

Использование индексов узлов усложняет формулы нахождения схемных функций по сравнению со схемным подходом (1.1). Например, если узлы i и «0» являются входными узлами схемы N , а j и «0» являются выходными, то передаточное сопротивление схемы находится по формуле [15]:

$$S = \frac{(-1)^{m+n} \det(N_1)}{\det(N)}, \quad (2.11)$$

где $t(n)$ являются $o(u)$ индексами узла $i(j)$, N_1 – схема с дополнительной парой норатор-нуллятор, подключенной между узлами i и «0», j и «0» соответственно. Таким образом, по методике Чанга и Вижбы нельзя получить схемную функцию как отношение двух схем – схемы числителя и схемы знаменателя. Нахождение числителя, как и в матричных методах, требует вычисления знака.

Чанг и Вижба обратили внимание на то, что схемы с нуллаторами и нораторами нередко могут быть упрощены путем удаления проводимостей, соединенных параллельно норатору или нуллатору. Это не изменяет значение схемного определителя. Впоследствии подобные преобразования были названы эквивалентными упрощениями [281]. Эти упрощения следует применять перед анализом каждой схемы или подсхемы.

Наличие нуллов обуславливает специфические условия вырождения (invalid) активных электрических цепей. Чанг и Вижба справедливо указали, что схема с нуллаторами вырождается, если число нораторов не равно числу нуллаторов. Однако неправильно считать, как в [15, с.], что только «в обратном случае схема является невырожденной» (рис. 2.2). Равенство числа нораторов и нуллаторов является необходимым, но не достаточным условием невырожденности схемы.

Чанг и Вижба рассмотрели простейшие случаи диакоптики применительно к схемам с нуллаторами. Обобщение формулы Фойснера (1.4) заключается в равенстве нулю одного из сомножителей. Если одна из подсхем, имеющих только один общий узел, является вырожденной, то определитель этой схемы будет равен нулю [15].

Если в схеме, состоящей из двух частей N_1 и N_2 , обе подсхемы являются невырожденными и имеют два смежных узла, один из которых является базисным, а второй обозначен как x , то схемный определитель N находится как:

$$\det N = (-1)^{p+k} \times \det(N_1) \times \det(\overline{N_2}) + (-1)^{q+k} \times \det(\overline{N_1}) \times \det(N_2), \quad (2.12)$$

где $\overline{N_1}(\overline{N_2})$ является схемой $N_1(N_2)$, полученной в результате объединения узла x с базисным узлом; p , q и k – совокупность индексов o и u узла x в схемах N_1 , N_2 и N соответственно [15]. Формула (2.12) по существу является более сложной записью формулы Фойснера (1.5) [32].

В работе [15] представлено оригинальное доказательство формулы (2.12):

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\det(N)}{(-1)^k \times \det(\overline{N})} = \frac{\det(N_1)}{(-1)^p \times \det(\overline{N_1})} + \frac{\det(N_2)}{(-1)^q \times \det(\overline{N_2})} = \\ &= \frac{(-1)^p \times \det(N_1)}{\det(\overline{N_1})} + \frac{(-1)^q \times \det(N_2)}{\det(\overline{N_2})} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^p \times \det(N_1) \times \det(\overline{N_2}) + (-1)^q \times \det(\overline{N_1}) \times \det(N_2)}{\det(\overline{N_1}) \times \det(\overline{N_2})}, \quad (2.13)$$

Доказательство формулы (2.12) можно применить для доказательства формулы Фойснера (1.5). Представляется, что оно является наиболее коротким и методически удачным.

Чанг и Вижба обращают внимание на то, что формула выделения параметра является частным случаем формулы (2.12), когда N_2 состоит из одного элемента G . В этом случае, если в схеме N существует элемент G , подключенный к узлам q и p , то схемный определитель равен

$$\det N = \det(N_1) + (-1)^{k+l+m} \times G \times \det(N_2), \quad (2.14)$$

где $k(l)$ является наибольшим $o(u)$ индексом q и p . Если оба o и u индекса p больше или меньше чем q , то $m=0$. В противном случае, $m=1$. N_1 – схема, полученная из схемы N в результате удаления элемента G , N_2 – схема, полученная из схемы N с дополнительной парой нуллятор-норатор (идеальным проводником) подключенной вместо G . Если какой-либо из o и u индексов q и p будут равны, то $\det(N_2) = 0$. Это соответствует случаю, когда узлы проводимости соединены идеальным проводником.

Чанг и Вижба, по-видимому, впервые использовали представление ССФ в виде схемно-алгебраических формул (САФ), содержащих в себе как алгебраические символы и знаки операций, так и схемные выражения в виде схем под знаком определителя. Применение САФ обеспечивает наглядность процессу исследования электрических цепей. В работе [15] рассмотрено получение САФ схемы (рис. 2.3), состоящей из двух частей A_{dm} и B , где A_{dm} является ИНУН.

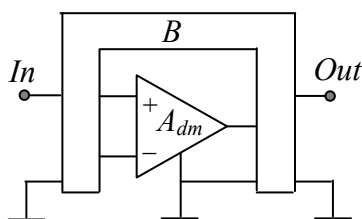


Рис. 2.3. Тестовая схема, состоящая из двух частей

В методе нулторной декомпозиции передаточная функция схемы находится как отношение определителей двух схем, в которых дополнительная пара нуллятор-норатор подключается к узлам входа-выхода и базисному узлу схемы соответственно. Согласно Теореме 1, если все знаки определителей совпадают и условия декомпозиции схем одинаковые, то функция схемы в виде САФ на рис. 2.3 записывается:

$$\begin{aligned}
 \frac{V_0}{V_i} = & \frac{\left| \begin{array}{c} \text{In} \\ \text{Out} \\ \text{N det} \end{array} \right|_B}{\left| \begin{array}{c} \text{In} \\ \text{Out} \\ \text{N det} \end{array} \right|_B} = \\
 = & \frac{\left| \begin{array}{c} \text{In} \\ \text{Out} \\ \text{N det} \end{array} \right|_B}{\left| \begin{array}{c} \text{In} \\ \text{Out} \\ \text{N det} \end{array} \right|_B} + \\
 = & \frac{\left| \begin{array}{c} \text{In} \\ \text{Out} \\ \text{N det} \end{array} \right|_B}{\left| \begin{array}{c} \text{In} \\ \text{Out} \\ \text{N det} \end{array} \right|_B} + \frac{\left| \begin{array}{c} \text{In} \\ \text{Out} \\ \text{N det} \end{array} \right|_B}{\left| \begin{array}{c} \text{In} \\ \text{Out} \\ \text{N det} \end{array} \right|_B} \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

Практическая непригодность методики Чанга и Вижбы как для компьютерной реализации, так и для учебного процесса, обусловлена использованием традиционных (ненаправленных) нуллов. Это потребовало применения весьма трудоемкой операции нахождения знака определителей. При этом для символического анализа не достаточно схемы замещения электрической цепи и требуются дополнительные построения. Поэтому результаты, полученные Чангом и Вижбой, являются шагом в сторону от направления, заданного Фойснером в решении диакоптической задачи.

Метод нулловой декомпозиции позволяет, хотя и ценой трудоемких выкладок, получать формулы бисекции схемы по четырем и более узлам [15]. Вместе с тем в задачах формирования ССФ сложных интегральных схем необходим общий алгоритм построения диакоптических формул для произвольного числа узлов бисекции. Спустя пять лет метод нулловой декомпозиции был доказан и обобщен в работе [278] с помощью теоремы об определителе суммы двух матриц В.П. Сигорского [230].

Метод нулловых остаточных схем. Результаты Фойснера получили прямое развитие в методе нулловых остаточных схем Сикета [78]. В нем использовался подход, в котором формулы (1.1) и (1.2) применялись повторно для последовательного выделения параметров пассивных элементов схемы до получения так называемых остаточных схем, определители которых выводятся из закона Ома (рис. 2.4).

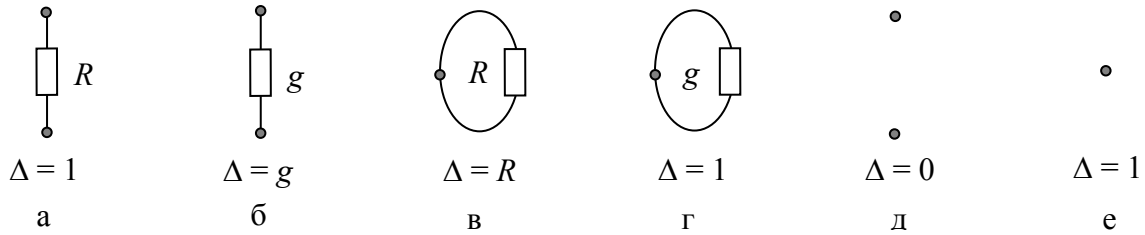


Рис. 2.4. Простейшие схемы и их определители

В последующем метод остаточных схем был расширен на цепи, содержащие нораторы и нуллаты, в совместной работе Р.Х. Сикета и М.Е. Партена [71]. Было предложено выделять по формулам Фойснера параметры всех имеющихся в схеме пассивных элементов до получения остаточных схем, состоящих только из нораторов и нуллатов, определитель которых мог быть равен либо 0 (согласно критериям вырождения схем, сформулированным Миликом и Озавой), либо ± 1 . Знак определителя остаточных схем определяется по правилам, проиллюстрированным на рис. 2.5.

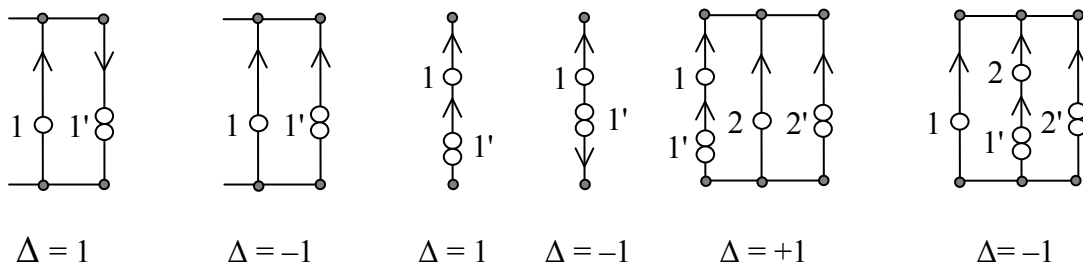


Рис. 2.5. Определение знака определителя остаточных схем

Метод остаточных схем может применяться для формирования символьных выражений четырех передаточных функций. В числителе ССФ записывается символьное выражение определителя схемы, в которой независимые источники заменены на норатор и нуллат, а в знаменателе – определитель схемы, полученной в результате размыкания источника тока (приемника напряжения) и замены на идеальный проводник источника напряжения (приемника тока).

К сожалению, метод остаточных схем не получил дальнейшего развития, не был расширен на схемы с УИ, не был реализован в компьютерной программе. Эти задачи были решены спустя четверть века независимо от работ [71, 72] при разработке метода выделения параметров, получившего название метода схемных определителей (МСО) (см. главу 3).

В более поздней работе авторы [71] обратились к методу Кирхгофа [26], послужившему основой многих топологических методов. Однако это развитие наступило спустя сто с лишним лет. Глубина этой статьи Кирхгофа до сих пор является источником недоразумений и дискуссий [172, 220], проводятся исследования по воссозданию хода мыслей основоположника теории электрических цепей [163]. Эту публикацию

Партена и Сикета [71] можно определить как выражение импедансной функции передачи, это было репродуцировано спустя двадцать лет в книге П.М. Лина [61], наряду с выражением адмиттансной функции передачи.

Разложение схемного определителя по параметрам УИ. Одним из наиболее совершенных символьно-топологических методов анализа, базирующихся на схемном подходе Фойснера, является метод, который предложил Риза Хашемян в 1977 году в своей работе [50]. В отличие от многих своих не очень любознательных коллег, Хашемян внимательно изучил труды своих предшественников [8, 22, 71] и выяснил, что ни топологический подход, используемый Давиесом [22] и Брауном [8], ни методика Партена и Сикета [71], не обеспечивают значительного прироста вычислительной эффективности при анализе больших схем по сравнению с традиционными матричными методами [52]. Кроме того, он обратил внимание на то, что метод остаточных схем не является общеприменимым, поскольку топология сложных схем с нораторами и нуллаторами не всегда позволяет разложить исходную структуру до схемы из аномальных управляемых источников.

Метод Хашемяна обеспечивает прямой топологический анализ в параметрической (квазисимволической) форме линейных электрических схем, содержащих как активные, так и пассивные элементы.

Согласно Теореме 2 [50, стр. 199], определитель линейной схемы N , содержащей зависимый источник (напряжения или тока) $W_i = \alpha_{ij} U_j$, управляемый переменной U_j (ток нулевого импеданса элемента e_i , или напряжение нулевого адмитанса элемента e_i), находится по формуле:

$$\Delta = \alpha_{ij} \Delta_1 + \Delta_2 \quad (2.16)$$

где схема N_2 , соответствующая Δ_2 , образуется из N путем удаления зависимого источника W_i , а N_1 , соответствующая Δ_1 , из N в результате замены управляющего элемента e_i нуллатором, а управляемого источника W_i норатором, как показано в табл. 2.2.

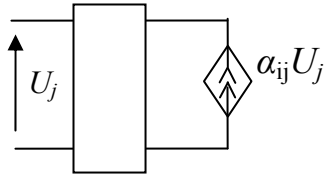
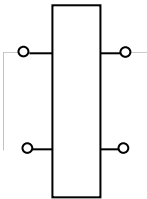
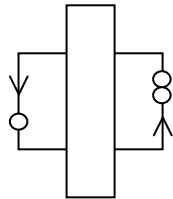
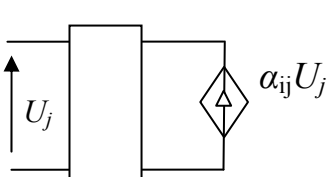
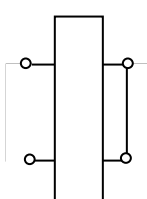
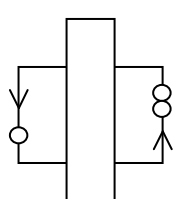
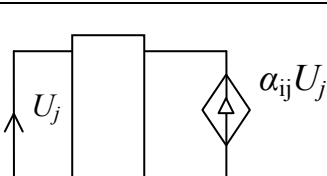
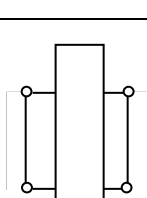
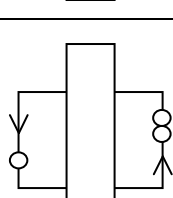
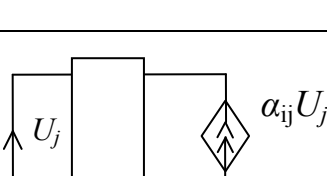
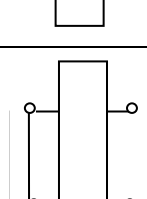
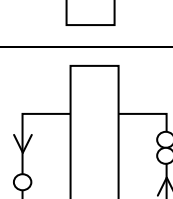
Хашемян в своей работе не приводит доказательства формулы (2.16), ссылаясь на то, что оно «весьма запутанно», вместо этого он предлагает использовать другой, значительно более сложный, способ выделения параметра УИ, изложенный в Теореме 3 [50, стр. 194]:

Пусть N – линейная активная схема и Δ – ее определитель расширенный на n управляемых источников с коэффициентами пропускания $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ в схеме N . Тогда схемный определитель Δ может быть получен по формуле:

$$\Delta = \Delta^r + \alpha_1 \Delta_{(\alpha_1)} + \alpha_2 \Delta_{(\alpha_2)} + \dots + \alpha_n \Delta_{(\alpha_n)} + \alpha_1 \alpha_2 \Delta_{(\alpha_1, \alpha_2)} + \dots + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \Delta_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \quad (2.17)$$

где схема N^r , соответствующая определителю Δ^r , образуется из исходной схемы N путем удаления всех n УИ, схема $N_{(\alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_k)}$, соответствующая $\Delta_{(\alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_k)}$, получается из N посредством замены управляемых источников $\alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_k$ парами норатор-нуллатор, согласно табл. 2.2, и удаления оставшихся из n УИ.

Табл. 2.2. Следствия выделения параметра УИ

Зависимый источник	N_2	N_1
		
		
		
		

Для повышения эффективности метода анализа активных схем Хашемян обобщил и дополнил условия вырождения и эквивалентные упрощения схем с нораторами и нуллаторами, предложенные в [8, 71]. Чтобы избежать повторения, приведем ряд новых положений, описанных в его работе [50, стр. 196]: 1) как последовательное, так и параллельное соединение двух нораторов (нуллаторов) в схеме N приводит к $\Delta=0$; 2) количество нораторов (нуллаторов), большее или равное числу узлов схемы N , приводит к $\Delta=0$; 3) удаление из схемы пассивного элемента (проводимость), подключенного параллельно с норатором (нуллатором), не приводит к изменению определителя Δ ; 4) если пассивный элемент e_i подключен последовательно с норатором (нуллатором) в N , то стягивание e_i приводит к получению схемы N_i^c , поскольку определитель исходной схемы будет находиться по формуле:

$$\Delta = y_i \Delta_i^c; \quad (2.18)$$

5) параллельное соединение норатора с нуллатором приводит к образованию короткозамкнутой ветви (после соответствующей перестановки элементов или смены их ориентации), последовательное соединение норатора с нуллатором приводит к размыканию.

Получение символьных выражений схемных функций по методу Хашемяна совпадает с описанным выше подходом Партена и Сикета.

Известна другая работа автора, посвященная разработке вычислительного алгоритма для прямого получения схемной функции [49], реализованного в компьютерной программе анализа электрических цепей в квазисимвольной (символьно-численной) форме. В статье [50] отмечаются такие преимущества реализации метода Хашемяна, как сравнительно высокая производительность и малый объем дискового пространства, требующегося для хранения результатов.

Установление научных приоритетов как главная составляющая исследования. Неоценимую помощь в поиске информации о символьно-топологических методах анализа электрических цепей, в определении их места в мировой науке оказал наш польский коллега Тадеуш Миланцей (1942–2008). Т. Миланцей родился в СССР, в г. Вильнюсе (Литовская ССР). Лишь после окончания Великой Отечественной войны его семья переехала в Польшу, в г. Лодзь. За годы своей профессиональной деятельности Тадеуш работал в трех университетах Гданьской области: Университете Гданьска, Техническом Университете Гданьска, и Морской Академии в Гдыне. В 1991 г. он стал патентным поверенным.

Областью его научных интересов являлись методы анализа электрических схем, базирующиеся на топологическом подходе. Он был лично знаком с некоторыми учеными, например с Беллертом, которых сегодня можно назвать классиками теории электрических цепей. На протяжении многих лет (начиная с 1989 г.) Т. Миланцей плодотворно сотрудничал с группой советских ученых, исследователей в области символьно-топологического направления анализа и синтеза электрических цепей, под руководством В. В. Филаретова. Результаты их совместной работы нашли отражение в серии публикаций [202, 218–221].

К сожалению, в сентябре 2008 году пан Тадеуш после продолжительной болезни скончался. Коллектив авторов выражает соболезнования семье и родственникам усопшего.

Таким образом, в ходе эволюции методов символьного анализа (набросок которой был дан выше) произошел возврат к ее исходной точке – методам Фойснера, но на более высоком уровне – анализе активных схем. Имевшие место не вполне удачные попытки обобщить схемный подход Фойснера для схем с УИ увели исследователей на путь разработки методов, предусматривающих использование промежуточных избыточных математических моделей в виде матриц и графов. Тем не менее, они подготовили почву для становления метода схемных определителей, в котором наконец-то был раскрыт потенциал схемного подхода Фойснера.

Глава 3. Основы метода схемных определителей

3.1. Факторизация (свертка) алгебраических выражений

Определитель схемы можно рассматривать, как это делали Кирхгоф и Максвелл [168, 215], в виде развернутого алгебраического выражения. Оно представляет собой символьную сумму произведений, имеющих одинаковое количество сомножителей, которые являются параметрами элементов схемы. Оптимальная свертка или факторизация традиционно считается проблемой вычислительной математики и программирования [9]. Известны многочисленные системы аналитических вычислений и компьютерной алгебры [169], некоторые из которых, например МАТНЕМАТИСА-3, предусматривают получение компактных символьных выражений в форме с вынесенными общими множителями [23].

Оптимальная свертка принадлежит к задачам, решаемым алгоритмами экспоненциальной трудности. Поэтому практически размерность задач факторизации невелика и приходится ориентироваться на тот или иной класс алгебраических выражений. Символьный анализ схем в десятки-сотни узлов и элементов возможен только при формировании вложенных выражений схемных определителей непосредственно, минуя как получение развернутого выражения, так и последующую его свертку [169]. Сложность схем, подлежащих символьному анализу при реализации предлагаемого подхода, будет зависеть не столько от числа узлов схемы и слагаемых ее определителя, сколько от эффективности алгоритмов прямого формирования ССФ. В этой связи первостепенное значение приобретает проблема оптимального разложения схемных определителей.

Наиболее общий и в то же время простой подход к свертке основан на первоочередном вынесении за скобки символа или подвыражения с наибольшим показателем участия [108]. Показатель участия символа (подвыражения) равен количеству слагаемых выражения, в которых данный символ (подвыражение) используется в качестве сомножителя. Если имеется несколько подвыражений, претендующих на выделение в первую очередь, то предпочтение отдается тому из них, которое наиболее трудоемко по числу операций. Этот подход, предложенный М.А. Бройером [11], нередко используется в оптимизирующих компиляторах с алгоритмических языков.

На основе подхода Бройера был разработан алгоритм свертки схемного определителя, использующий выделение отдельных символов - параметров схемы (но не подвыражений) [248, 254]. Алгоритм включает следующие шаги: 1) выбор символа с наибольшим показателем участия в исходном выражении или свободном подвыражении; 2) вынесение выбранного символа за скобки (при этом образуются подвыражение-сомножитель и свободное подвыражение); занесение свободного

подвыражения в стек, то есть магазин с правилом «первым зашел, последним вышел»; 3) если подвыражение-сомножитель не является отдельным символом, то выбрать в этом подвыражении символ с наибольшим показателем участия и перейти к пункту 2; 4) если стек не пустой, то извлечь из него очередное свободное подвыражение и перейти к пункту 1.

Количество слагаемых в схемном определителе увеличивается с усложнением схемы по экспоненциальному закону. Поэтому дальнейшее развитие теории факторизации абстрактных алгебраических выражений вряд ли будет содействовать решению проблемы формирования оптимальных выражений ССФ.

Символьный анализ схем в десятки-сотни узлов и элементов возможен только при формировании вложенных выражений схемных определителей непосредственно, минуя как получение развернутого выражения, так и последующую его свертку. Сложность схем, подлежащих символьному анализу при реализации предлагаемого подхода, будет зависеть не столько от числа узлов схемы и слагаемых ее определителя, сколько от эффективности алгоритмов прямого формирования ССФ. В этой связи первостепенное значение приобретает проблема оптимального разложения схемных определителей.

Предложенный алгоритм был использован в первых версиях программы *SYMBOL* для формирования вложенных выражений передаточных ССФ [254–256, 260, 262, 271]. Программа *SYMBOL* была успешно апробирована и внедрена (1989–1992 гг.) в 14 проектных организациях и вузах. Однако формируемые программой *SYMBOL* выражения ССФ не только не являются оптимальными, но и могут быть легко улучшены в результате визуального просмотра. Основной причиной этого является то, что алгоритм свертки, выделяя лишь отдельные символы, не обеспечивает сокращения операций сложения. Возможности программы *SYMBOL* ограничиваются схемами до 10 узлов, имеющими разреженную структуру. Это ограничение определяется числом слагаемых в знаменателе ССФ (не превышающим 2500 для первых версий *SYMBOL* [255, 256]), которое необходимо для выполнения свертки целиком помещать в память компьютера. Опыт реализации программы *SYMBOL* и работа с наиболее продвинутой в обсуждаемом направлении системой МАТЕМАТИКА-3 [23] убеждает в том, что с помощью подобных систем принципиально невозможно получение ССФ для схем в десятки узлов и элементов.

3.2. Формирование оптимальных выражений схемных определителей пассивных цепей

Критерии оптимальности выражений ССФ. В теории электрических цепей отсутствует понятие «оптимальное выражение ССФ», хотя проблема оптимальной свертки (факторизации) алгебраических выражений уже три десятилетия волнует специалистов по программированию и компьютерной алгебре. Под оптимальными выражениями схемных функций будем понимать выражения ССФ, оптимальные по вычислительной сложности и количеству операций вычитания. Исходя из потребностей теории и практики анализа и проектирования электрических цепей, можно сформулировать три основных требования к методу формирования оптимальных выражений ССФ: 1) универсальность; 2) вычислительная устойчивость; 3) реализуемость параллельных вычислений.

Под универсальностью понимается применимость метода к широкому классу линейных схем и степень его пригодности для формирования ССФ как в качестве инженерной методики, так и в виде компьютерной программы. Универсальный метод должен обеспечивать получение не только единых выражений, но и последовательностей выражений ССФ, быть удобным для формирования как символьных, так и символьно-численных выражений ССФ.

Требование устойчивости касается свойств выражений ССФ при проведении численных расчетов в случае плохой обусловленности, то есть существенного разброса значений параметров и других численных вырождений, что характерно для реальных электрических цепей [211]. В этом требовании должна предусматриваться возможность формирования выражений ССФ, оптимальных по сложности [13] и числу операций вычитания, которые являются основным источником погрешности при вычислениях с ограниченным числом значащих цифр [211]. Необходимость свертки обусловлена тем, что свертка выражения приводит не только к уменьшению их сложности, но и к увеличению точности вычисляемого результата [283]. Сокращение сложности выражений ССФ обеспечивает конкурентоспособность символьных методов с численными методами формирования и решения уравнений электрического равновесия.

Третье требование к оптимальному методу формирования ССФ обусловлено высочайшей степенью интеграции современных электрических цепей, которой неспособна противостоять все возрастающая мощность компьютерной техники [247]. Союзником на стороне проектировщиков электро- и радиоаппаратуры являются методы расчета схем делением их на части, а также фундаментальное свойство сложных электрических цепей – разреженность их структуры.

Анализ наиболее известных символично-топологических методов использующих различные подходы к анализу электрических цепей, представленный во второй главе, показал, что ни один из них не позволяет решить задачу формирования оптимальных выражений ССФ.

Схемный подход к достижению оптимальности. С точки зрения точности вычислений на основе ССФ целесообразно полностью исключить операции деления в числителе и знаменателе ССФ. Операции деления препятствуют аналитической обработке и упрощению полученных выражений ССФ [283]. В частности, затрудняется формирование полиномиальных и символично-численных ССФ [153]. Немаловажно, что операции деления выполняются в несколько раз медленнее, чем другие операции, которые поддерживаются численным сопроцессором [26].

Среди методов, не использующих операции деления, требованию универсальности удовлетворяет в наибольшей степени метод выделения параметров Фойснера по формулам (1.1)–(1.2), который позволяет представить определитель схемы в компактном и желаемом виде, что достигается изменением порядка выделения ее элементов. При этом нахождение ССФ сводится к рассмотрению исходной схемы и производных от нее схем.

Для формирования оптимальных выражений схемных определителей использовано взаимно однозначное соответствие между преобразованиями алгебраического выражения и изменениями в структуре рассматриваемой схемы [153]. Изоморфное соответствие вытекает из формул (1.1) – (1.2). В отличие от показателя участия параметра [244, 248] показатель участия (ПУ) ветви [245] получается в результате стягивания этой ветви и нахождения числа деревьев образованной схемы, то есть без трудоемкого просмотра выражения. Таким образом, удается исключить формирование развернутого выражения определителя и иметь дело лишь с изображениями исходной схемы и производных от нее схем. Эффективное выделение подвыражений оказывается возможным вследствие того, что произвольному подвыражению может быть сопоставлена некоторая схема.

При формировании оптимальных выражений ССФ необходимы правила выбора мультиветвей (параллельно соединенных u -ветвей) и других подсхем, параметры которых подлежат выделению в первую очередь. Учитывая аналогию с алгоритмом свертки [248], среди мультиветвей схемы выбирается та, которая имеет наибольший ПУ. Чтобы избежать использования процедуры вычисления количества деревьев, предложены следующие правила [265]:

- 1) Правило «минимума» – в схеме рассматриваются узлы и сечения, которым инцидентно минимальное количество мультиветвей. Принимается, что наибольшим ПУ обладает та из них, которая смежна наименьшему числу мультиветвей;
- 2) Правило ПУ заключается в первоочередном выделении мультиветвей, имеющих наибольшие ПУ;
- 3)

Правило кратности требует, чтобы среди претендентов на выделение выделялась в первую очередь та мультиветвь, которая имеет наибольшую кратность, то есть количество образующих ее ветвей.

Анализ полных схем. Для подтверждения достоверности установленных правил использована полная схема, которая рассматривалась Фойснером [32] как наиболее общая модель пассивной электрической цепи и традиционно является объектом исследования. В качестве базы для сравнения использовалась формула определителя схемы, полученная на основе разложения по ветвям, входящим в пути между парами узлов [248]. Эта формула имеет наименьшую сложность среди известных формул, но в ней не учитываются правила ПУ и кратности. Формула определителя полной схемы, полученная с помощью оптимального выделения мультиветвей, требует значительно меньше операций сложения, чем базовая формула. Так, выигрыш в числе сложений увеличивается с одной операции при $q=4$ до 2095427 операций при $q=10$. Показатели оптимизированной формулы сведены во второй и третий столбцы табл. 3.1.

Таблица 3.1.

q	Мультиветви		Подсхемы с 3 узлами		Без свертки	
	Число “*“	Число “+”	Число “*“	Число “+”	Число “*“	Число “+”
4	9	12	8	11	32	15
5	40	62	29	50	375	124
6	205	340	122	237	5184	1295
7	1236	2102	617	1259	84035	16806
8	8659	14840	3710	7698	1572864	262143
9	69280	118974	25979	54165	33480783	4782968
10	623529	1071276	207842	433863	800000000	99999999

В производных схемах могут быть выделены последовательно соединенные ветви и мультиветви, а также трехузловые подсхемы. Первоочередное выделение последовательно соединенных ветвей (мультиветвей) при совместном использовании формул (1.1) и (1.4) с учетом правил ПУ и кратности позволяет получить формулу, которая требует существенно меньше операций. Дальнейшая оптимизация формулы определителя полных схем достигается выделением трехузловых подсхем по мере их образования в производных схемах

$$\Delta = \sum_{i=1} y_i \Delta_i^{1,2,\dots,i-1} + (y_{q-2} + y_{q-1}) \Delta_{q-1}^{1,2,\dots,q-1,t} + [y_{q-2}(y_{q-1} + y_t) + y_{q-1}y_t] \Delta_{q-2,q-1}^{1,2,\dots,1,q-3} \quad (3.1)$$

где i – порядковые номера ветвей, инцидентных некоторому узлу полной схемы, y_t – ветвь, дополняющая ветви y_{q-2} и y_{q-1} до треугольника [243].

Правило половинного деления. Исследование формулы (3.1) показывает, что, наряду с правилами ПУ и кратности, необходимо учитывать третье правило, которое называется правилом половинного

деления. Оно означает, что получение оптимального выражения достигается выделением более сложных подсхем и минимизацией разности между количествами ветвей в выбранных подсхемах.

Вычислительная сложность формулы (3.1) характеризуется данными четвертого и пятого столбцов в табл. 3.1. Так, оптимальное выражение определителя полной пятиузловой y -схемы требует соответственно 29 и 50 операций умножения и сложения. В то же время выражение определителя полной матрицы узловых проводимостей четвертого порядка, полученное с помощью пакета МАТНЕМАТИСА-3, содержит 77 умножений и 110 сложений (это лучший результат среди аналогичных программных систем). Для сравнения в шестом и седьмом столбцах табл. 3.1 помещены количества операций в соответствующих развернутых выражениях схемных определителей.

О формировании единых и последовательных выражений. ССФ могут быть представлены в двух формах: 1) в виде единого выражения; 2) как иерархическую последовательность подвыражений, которая называется последовательным выражением. Обычно ССФ представляется в виде единого выражения, параметрами которого являются только параметры элементов схемы.

Вследствие того, что правило половинного деления не было известно до появления работы Лина и М.М. Гассона [51, 61], первая традиционная форма представления ССФ ими критически рассматривалась в связи с невозможностью ее использования для сложных электрических цепей.

При записи ССФ в виде последовательных выражений различные виды иерархической бисекции приводят к не слишком различающимся по сложности формулам [270], если во всех случаях используется одно и то же деление на подсхемы. С другой стороны, Лин и Гассон справедливо заметили, что единые выражения ССФ, сформированные по способу наращивания, не могут конкурировать по сложности с последовательными выражениями, но ошибочно обобщили это свойство на все способы иерархической бисекции, включая даже те, которые им не были известны. Подчеркнем еще раз, что для формирования оптимального единого выражения ССФ необходимо осуществлять иерархическую бисекцию схемы в соответствии с правилом половинного деления [263, 265, 270]. При этом исходная схема делится на две подсхемы приблизительно одинаковой сложности. Аналогично поступают с подсхемами второго, третьего и т.д. уровней иерархии. Это позволяет многократно сократить длину формул и количество требуемых операций.

Полученные оценки сложности и вычислительной устойчивости при сравнении единых и последовательных выражений указывают на целесообразность разработки алгоритмов и программ формирования единых выражений, в чем сомневаются некоторые зарубежные специалисты [51].

Анализ лестничных и цепных схем. Лестничной называется схема, образованная n звеньями, которая содержит $2(n+1)$ узлов и $3n+1$ ветвей. Более заполненную структуру имеет цепная схема с n звеньями, содержащая $n+2$ узлов и $2n+1$ ветвей. Рекурсивное деление названных схем можно выполнить двумя способами. Традиционный способ состоит в применении наращивания, то есть исходная схема на первом уровне иерархии делится на две подсхемы, которые несопоставимы по сложности. Со второй подсхемой поступают так, как с исходной схемой и т.д. до получения двух подсхем минимальной размерности. Предложенный способ учитывает правило половинного деления [259, 265].

При формировании определителей лестничных и цепных схем использовались формулы (1.1), (1.4) и (1.5) с учетом правил ПУ и кратности. Результаты расчетов для числа операций умножения сведены в табл. 3.2. Как видно, число операций умножения в оптимальных выражениях определителей лестничных и цепных схем увеличивается пропорционально увеличению количества звеньев n . Это опровергает утверждения о невозможности получения единых выражений для ССФ сложных электрических цепей [51, 61].

Таблица 3.2.

Число звеньев	Лестничные схемы			Цепные схемы	
	Первое звено	Среднее звено (y)	Среднее звено (z)	Первое звено	Среднее звено
1	4	4	0	2	2
2	12	12	2	5	5
3	28	20	6	9	9
4	60	36	9	15	14
5	124	52	18	23	20
6	252	68	23	35	27
7	508	84	32	51	35
8	1020	116	36	75	44
9	2044	148	56	107	54

Технология формульного вывода, разработанная Д.В. Шеиным, обеспечила формирование символьных выражений определителей для схем в десятки-сотни узлов и элементов. Для формирования оптимальных выражений определителей произвольных пассивных u -схем была использована программа *GRAF* [262], также реализованная Д.В. Шеиным, что подтвердило теоретические оценки сложности (см. табл. 3.1 и 3.2).

Оптимальные z - и uz -выражения ССФ. Для лестничной схемы число узлов более чем в два раза превышает число независимых контуров. Поэтому в качестве параметров ветвей такой схемы целесообразно использовать сопротивления. Учитывая дуальность формул (1.1) и (1.2),

для формирования оптимальных z - и uz -выражений схемных определителей введено понятие макроветви, параметром которой является сумма сопротивлений образующих ее последовательно соединенных z -ветвей. Оптимальное z -выражение получается на основе формул (1.1) – (1.2), (1.4) – (1.5) с учетом правил ПУ, кратности и половинного деления. В силу дуальности формул (1.1) и (1.2) правило «минимума», используемое при выборе мультиветвей, модифицируется в правило «максимума» для выбора макроветвей, то есть среди макроветвей, инцидентных узлу или сечению с максимальным числом мультиветвей и макроветвей, выбирается та, которой смежно наибольшее их количество. Результаты расчетов для числа операций умножения приведены в четвертом столбце табл. 3.2.

В случаях, когда количества независимых узлов и контуров схемы отличаются незначительно, смешанное представление параметров ветвей открывает возможности для получения uz -выражений символьных схемных функций, имеющих различную сложность и способных конкурировать по вычислительным свойствам с u - и z -выражениями. Для этого совместно используются формулы (1.1)–(1.2), (1.4)–(1.5) и правила оптимального выделения параметров.

Задание параметров емкостей (индуктивностей) в виде емкостных проводимостей (индуктивных сопротивлений) позволяет избежать операций деления при получении ССФ в операторной форме. При надлежащем задании параметров ветвей всегда могут быть получены оптимальные безразмерные uz -выражения для передаточных ССФ. Такие выражения потенциально более устойчивы при численных расчетах [283]. При этом также снижаются требования к диапазону представления чисел. Из правила ПУ и формул (1.1), (1.2) следует, что уменьшение сложности схемного определителя достигается заданием проводимостями (сопротивлениями) ветвей с меньшими (большими) ПУ.

Говорить о получении оптимальных z - и uz -выражений обычно имеет смысл только в случае анализа схем, имеющих разреженную структуру. Для схем, близких к полным схемам, необходимо использовать u -выражения ССФ. Данные табл. 3.1 являются предельными оценками сложности таких выражений. Вместе с тем существует специальный класс полных схем, параметры которых удовлетворяют условиям равновесия Уитстона [89]. Это полные уравновешенные схемы, находящие применение в электротехнике и измерительной технике.

Оптимальные формулы для полных уравновешенных схем. Задача формирования оптимальных выражений ССФ для таких схем имеет весьма простое решение с линейной зависимостью количества требуемых операций от числа узлов схемы [266–268, 272, 273]. Для нахождения ССФ входного сопротивления между узлами i и l рассматриваемой схемы используется формула

$$Z_{il} = (\delta^i + \delta^l) / \Delta, \quad (3.2)$$

где Δ – определитель ядра схемы, δ^i и δ^l – дополнения определителя i -го и l -го узлов ядра. Передаточная схемная функция по напряжению находится по формуле

$$K_{ij} = \delta^l / (\delta^i + \delta^l). \quad (3.3)$$

При этом источник напряжения включен между узлами i и l , а отклик снимается с узлов j и l . ССФ передаточного сопротивления между указанными парами узлов имеет вид

$$Z_{il,jl} = \delta^l / \Delta. \quad (3.4)$$

Ядром полной уравновешенной схемы с q узлами называется ее подсхема, включающая q независимых проводимостей. Ядро может содержать один или несколько контуров, каждый из которых имеет нечетное количество ветвей (нечетных контуров). При наличии более одного контура ядро представляет собой несколько изолированных друг от друга подсхем, в каждой из которых имеется один и только один контур.

В простейшем случае, когда ядро является нечетным контуром с q ветвями, его определитель находится по формуле

$$\Delta = \sum_{i=1}^q \Delta_i, \quad (3.5)$$

где Δ_i – определитель i -го узла контура. Δ_i представляет собой произведение $(q+1)/2$ сомножителей. Первые два из них являются параметрами проводимостей пары ветвей контура, инцидентных узлу i . Оставшиеся $(q-3)/2$ сомножителей соответствуют параметрам проводимостей тех ветвей контура, которые несмежны друг другу и ветвям, учитываемым в первых двух сомножителях. Оптимальная свертка выражения Δ выполняется с помощью алгоритма [248]. Дополнение определителя i -го узла контура имеет вид

$$\delta^i = P / \Delta_i, \quad (3.6)$$

где P – произведение проводимостей ветвей контура.

В работе [283] предложены оптимальные формулы для нахождения определителя одноконтурного ядра в общем случае, при наличии неконтурных ветвей. Доказано, что использование ядер, имеющих более одного контура, не позволяет получить ССФ, лишенные иррациональностей. Разработана диакоптика многоконтурного ядра и выведены формулы для его определителя и дополнений, требующие минимального количества операций извлечения квадратного корня. Сформулированы правила получения полного класса решений вековой

задачи преобразования полной уравновешенной схемы в эквивалентную звезду [272], которые облегчают применение выражений (3.2) – (3.4).

3.3. Метод схемных определителей

Становление метода схемных определителей, альтернативного существующим матричным, графовым и теоретико-множественным методам. Фундаментальные работы Милика и Озавы не были положены в основу эффективных символьных методов анализа активных электрических цепей. Символьно-топологические методы Партена-Сикета и Хашемяна на протяжении четверти века оставались без внимания специалистов.

Следует отметить, что метод Партена-Сикета применим только для схем, содержащих идеальные ОУ (нуллары), а метод Хашемяна связан с образованием вырожденных схем, число которых возрастает комбинаторно с увеличением числа УИ в схеме. Как метод остаточных схем Партена-Сикета, так и метод Хашемяна для разложения определителя по параметрам УИ, не являются вполне приемлемыми методом Фойснера, поскольку не используют формулы рекурсивного выделения параметров УИ, подобные формулам выделения двухполюсников (1.1) и (1.2). Это не позволяет использовать принципы формирования оптимальных выражений ССФ для активных электрических цепей.

В конце 80-х годов работы Фойснера подверглись пристальному анализу в СССР, было предложено обобщение формулы Фойснера для выделения дуги унисторного графа, отображающего схему с источниками тока, управляемыми напряжением [254, 257]. Были установлены правила для формирования оптимальных по сложности выражений знаменателей схемных функций на основе формул Фойснера, получены минимальные выражения для определителей полных, цепных и лестничных схем в виде единого выражения [265].

В 1996 году В.В. Филаретовым вводится понятие неудаляемого управляемого источника (НУИ) (рис. 2.1,б), обобщающее понятие ориентированного нуллора [275], что позволило распространить схемный подход на анализ схем с управляемыми источниками. НУИ, состоящий из ГНУИ (генератора НУИ) и ПНУИ (приемника НУИ), является предельным случаем УИ при наложении запрета на его удаление из схемы (нейтрализацию).

При необходимости параметру НУИ вместо значения, равного единице, можно присвоить значение, равное параметру некоторого УИ. Это отличает НУИ от обычного нуллора и ориентированного нуллора Брауна, которые сами по себе не имеют параметров, а моделируют ОУ с коэффициентом усиления, стремящимся к бесконечности.

Далее для краткости взвешенный ориентированный нуллок будем называть просто нуллокром.

Рекурсивное разложение схемного определителя. Формула разложения схемного определителя по параметрам УИ может быть записана в двух формах [40, 275]

$$\Delta = \Delta(\chi \Rightarrow \text{НУИ}) + \Delta(\chi=0), \quad \Delta = \chi \Delta(\chi \Rightarrow \text{нуллок}) + \Delta(\chi=0), \quad (3.7)$$

где χ – обобщенный параметр УИ: коэффициент передачи тока β ; коэффициент передачи напряжения k ; передаточное сопротивление Z_y или передаточная проводимость Y_y ; $\Delta(\chi \Rightarrow \text{НУИ})$ – определитель первой производной схемы, полученной из исходной схемы путем придания выделяемому УИ статуса НУИ; $(\chi \Rightarrow \text{нуллок})$ – определитель первой производной схемы, полученной из исходной схемы в результате замещения выделяемого УИ нуллокром; $\Delta(\chi=0)$ – определитель второй производной схемы, которая образована в результате нейтрализации выделяемого УИ, то есть принятия $\chi=0$.

Согласно (3.7) определитель исходной схемы записывается в виде суммы определителей первой и второй производных схем. Вторая формула (3.7) предусматривает явное выделение параметра УИ. Эта формула впервые предложена Хашемяном в 1977 году [50], который однако не указал на ее самостоятельность, а лишь использовал ее для одновременного выделения параметров всех УИ (2.17). Применение формулы (2.17) ограничивает возможности символьного анализа сложных электрических цепей, поскольку количество слагаемых в формуле Хашемяна связано комбинаторной зависимостью с числом выделяемых УИ (подраздел 2.4). В работах [275, 277] обосновывается эффективность формирования ССФ на основе рекурсивного применения формул (3.7).

Выделением параметров пассивных элементов и УИ можно свести анализ произвольной активной схемы к анализу ряда элементарных активных схем, то есть схем, содержащих исключительно нуллок, параметры которых равны единице. Перед нахождением определителя такой схемы необходимо исследовать ее на вырожденность. Нораторы обязательно образуют дерево невырожденной схемы, а нуллокаторы входят в дополнение этого дерева и наоборот. Отсюда вытекает, что топологические свойства невырожденной элементарной активной схемы совпадают со свойствами полного дерева схемы тока-напряжения. Ни один из ИТУН, формирующих полное дерево, не может быть удален, поскольку это приведет к вырождению схемы. Следовательно, полное дерево Коутса, как и элементарная активная схема, состоит из нуллок, но их параметры равны не единицам, а значениям проводимостей y -ветвей и передаточных проводимостей ИТУН, генераторы и приемники которых вошли в это дерево. Таким образом, определитель элементарной активной схемы может быть найден с помощью процедуры Коутса для нахождения знака полного

дерева. Однако, как было показано в разделе 2.3 использование процедуры Коутса является трудоемкой задачей, избежать которую позволяет специальная топологическая формула для выделения параметра нуллора.

Выделение параметра нуллора. Топологическая формула для выделения параметра нуллора с номером n имеет вид

$$\Delta = \pm \Delta_n, \quad (3.8)$$

где Δ_n – определитель схемы, полученной из первоначальной элементарной активной схемы в результате следующих преобразований: 1) стягивание норатора (нуллатора) выделяемого нуллора таким образом, чтобы нораторы (нуллаторы), которые инцидентны одному из узлов – опорному узлу этого норатора (нуллатора), переключились на другой его узел; 2) объединение опорных узлов выделяемого нуллора. Положительный (отрицательный) знак перед Δ_n выбирается в случае противоположной (одинаковой) ориентации норатора и нуллатора нуллора в первоначальной элементарной схеме по отношению к его опорным узлам.

Преобразования 1 и 2, выполняемые относительно выделяемого нуллора, называются его стягиванием. Опорные узлы, относительно которых выполняется стягивание нуллора, выбираются произвольно. При наличии у норатора и нуллатора общего узла целесообразно использовать его в качестве опорного узла и генератора, и приемника. Для этого случая преобразование 2 в операции стягивания опускается, а данное выше правило выбора знака инвертируется, то есть знак перед Δ_n считается положительным (отрицательным) при одинаковой (противоположной) ориентации норатора и нуллатора соответствующего нуллора по отношению к общему опорному узлу в первоначальной схеме.

Принципиальное отличие формулы (3.8) от формулы (3.7) состоит в способе определения знака перед выделяемым параметром. Рекурсивное применение простейшей формулы (3.8) избавляет от необходимости назначать базисный узел в элементарной активной схеме, образовывать подстановку из главных генераторов и приемников, определять их знаки и число инверсий в подстановке.

Метод стягивания и удаления ветвей. Для объединения полезных свойств формул (3.7) и (3.8) топологической формуле для выделения параметра нуллора была дана схемная интерпретация [277]. Также было разработано топологическое правило нахождения знака, не требующее нумерации узлов схемы и позволяющее минимизировать число операций вычитания в формируемых выражениях ССФ. Это потребовало введения операции стягивания для УИ, подобной аналогичным операциям для у-ветви (1.2) и нуллора (3.8).

Предложенная в [277] модификация формулы (3.7), не приводит к образованию нового нуллора взамен УИ в первой производной схеме

$$\Delta = \pm \chi \Delta_\chi + \Delta(\chi=0), \quad (3.9)$$

где Δ_z – определитель схемы, полученной из первоначальной схемы в результате стягивания выделяемого УИ.

Если опорным узлам инцидентны y -ветви, то для выполнения стягивания УИ должны быть замещены параллельным соединением генератора тока и приемника напряжения. Поскольку нейтрализация генераторов напряжения и приемников тока приводит к объединению узлов схемы, не допускается инцидентность соответствующих ветвей других УИ хотя бы одному из опорных узлов выделяемого УИ. Это ограничение всегда можно обойти надлежащим выбором опорных узлов, первоочередным выделением z -ветвей и УИ с генераторами напряжения и (или) приемниками тока, а также заменой при необходимости операции стягивания операцией преобразования в нулор.

На базе МСО была реализована компьютерная программа *CIRSYM*, рабочей информацией в которой служил образ схемы в виде списка произвольных линейных элементов [275]. В 2002 году была защищена докторская диссертация [283].

Важнейшее отличие МСО от метода анализа цепей, предложенного Фойснером, заключается в отказе от использования топологической формулы передачи. В методе схемных определителей знаменатель ССФ D является определителем схемы с нейтральзованными входом и выходом (источник напряжения или приемник тока стягиваются, а источник тока или приемник напряжения удаляются). Числителем N является определитель схемы, в которой независимый источник и приемник с искомым откликом замещаются нулором.

Понятия определителя схемы и ее минора имеют самостоятельное значение в теории электрических цепей. Схемные представления не только не повторяют матричный язык, но и позволяют видоизменить или усовершенствовать некоторые соотношения для матричных определителей [176, 279, 281]. Индуктивное построение схемного определителя в соответствии с формулами выделения элементов схемы начинается с того, что называются определители простейших схем в виде висячих ветвей и петель, которые выведены из закона Ома. Схемный определитель в отличие от матричного определителя принципиально не содержит взаимно уничтожающихся слагаемых, которые порождаются расположением параметра элемента схемы в четырех позициях матрицы с разными знаками, что требует использования специальных формул. Наконец, и это весьма важно в приложениях и программировании, схемный определитель инвариантен к способу задания параметров схемы и для его формирования достаточно списка элементов схемы. В то же время способ задания параметров влияет на выбор матрицы схемы, соответствующих правил ее построения и формул разложения определителя.

3.4. Схемные выражения для схемных функций

На возможность представления схемами числителя и знаменателя произвольных функций для цепей с любыми типами элементов указал еще Браун. Для этого он предложил использование ориентированного нуллора. Введение ориентированного взвешенного нуллора позволило наглядно представить правила нахождения ССФ в виде простых и наглядных схемных уравнений. Проиллюстрируем получение схемного уравнения для передаточной функции по напряжению путем формального умножения на U/U , что приводит к эквивалентной замене независимого источника на управляемый (рис. 3.1, а).

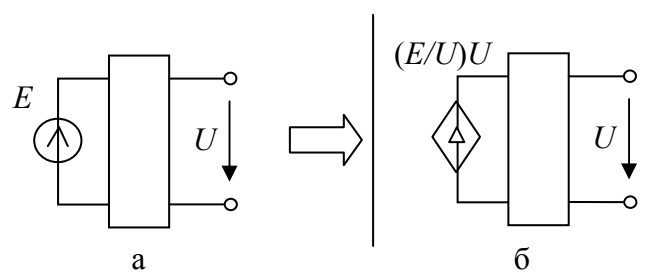


Рис. 3.1. Эквивалентная замена независимого источника

Схема на рис. 3.1, б не содержит независимых источников, следовательно, ее определитель при токе I , отличном от нуля, должен быть тождественно равен нулю, то есть схема на рис. 3.1, б является вырожденной. Применяя формулу выделения параметров УИ (3.7) к схеме на рис. 3.1, а, получаем схемно-алгебраическое выражение

$$\left| \begin{array}{c} (E/U)U \\ \text{Circuit with dependent source} \\ U \end{array} \right| = (E/U) \left| \begin{array}{c} \text{Circuit with current source} \\ \text{Circuit with current source} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Circuit with open terminals} \\ \text{Circuit with open terminals} \end{array} \right| \quad (3.10)$$

которое с учетом вырожденности схемы на рис. 3.1,б приводит к выражению для искомого отклика U/E :

$$E \left| \begin{array}{c} \text{Circuit with current source} \\ \text{Circuit with current source} \end{array} \right| \Bigg/ \left| \begin{array}{c} \text{Circuit with open terminals} \\ \text{Circuit with open terminals} \end{array} \right| \quad (3.11)$$

Таким образом, можно записать САФ для нахождения функции передачи по напряжению в виде, представленном на рис. 3.2,а. Аналогичным образом могут быть выведены схемные представления для

остальных ССФ: передаточной проводимости (рис. 3.2,б), передаточного сопротивления (рис. 3.2,в), передаточной функции по току (рис. 3.2,г), входной проводимости (рис. 3.2,д), входного сопротивления (рис. 3.2,е).

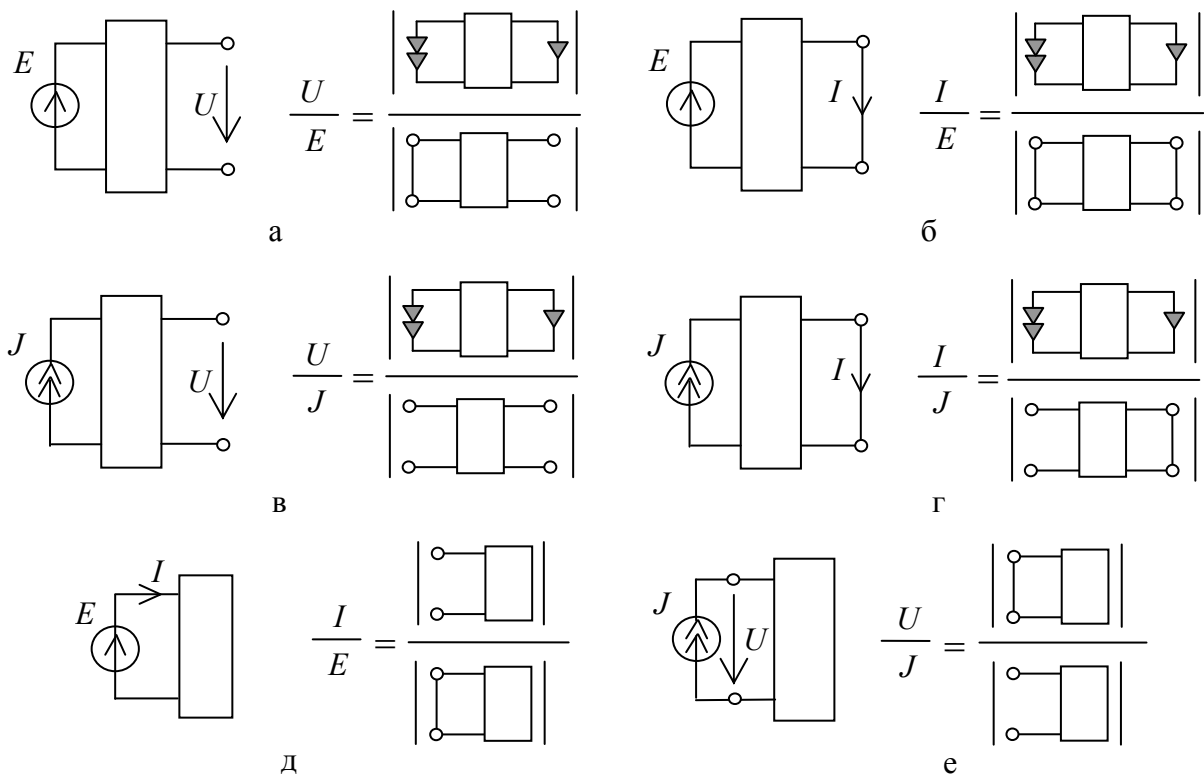


Рис. 3.2. Схемно-алгебраические выражения символьных схемных функций

Здесь E и J обозначают соответственно параметры независимых (измерительных) источников напряжения и тока, а U и I – искомые отклики напряжения и тока. Матричная [236] и графовая [254] формулировки правил получения ССФ существенно более громоздки, поскольку требуют нумерации узлов схемы и использования понятий симметричного и несимметричного алгебраических дополнений матрицы или графа.

3.5. Общий алгоритм разложения схемного определителя

Выделение нуллов и УИ в произвольном порядке обеспечивает формирование оптимальных выражений ССФ для активных электрических цепей. Нахождение ССФ сводится к разложению определителей двух схем: схемы числителя и схемы знаменателя. Схемный определитель тождественно равен нулю в случае вырожденной схемы. Поэтому перед выделением параметров выполняется проверка наличия простейших признаков вырождения [275]: 1) схема несвязна; 2) в схеме имеется хотя бы одно сечение, образованное только генераторами тока и нораторами или только приемниками напряжения и нуллаторами; 3) в схеме имеется хотя бы один контур, образованный только генераторами напряжения и нораторами или только приемниками тока и нуллаторами.

Проверка на вырожденность и эквивалентные упрощения (табл. 3.3 и табл. 4.6) [281] безусловно выполняются для всех схем и подсхем, полученных в результате преобразований исходной схемы. Разработан алгоритм формирования оптимальных выражений схемных определителей активных цепей, который заключается в рекурсивном исполнении следующих шагов для исходной схемы, а также производных от нее схем и подсхем [283].

Таблица 3.3. Эквивалентные упрощения (преобразования) схем перед нахождением схемных функций

№	Исходная схема	Эквивалентная схема
1	2	3
1	Удаление подсхемы, имеющей один общий узел со схемой	
2	Удаление двухполюсника, параллельного независимому источнику напряжения	
3	Удаление двухполюсника, параллельного управляемому источнику напряжения	
3*	Разложение определителя схемы с двухполюсником, который соединен параллельно управляемому источнику напряжения	
4	Удаление двухполюсника, параллельного приемнику тока – амперметру	
5	Удаление двухполюсника, параллельного приемнику тока УИ	

Окончание табл. 3.3

1	2	3
5*	Выделение двухполюсника, параллельного приемнику тока УИ	
6	Стягивание двухполюсника, соединенного последовательно с независимым источником тока	
7	Стягивание двухполюсника, соединенного последовательно с управляемым источником тока	
7*		
	Выделение двухполюсника, последовательного управляемому источнику тока	
9	Стягивание двухполюсника, соединенного последовательно с приемником напряжения – вольтметром	
10	Стягивание двухполюсника, соединенного последовательно с приемником напряжения УИ	
10*		
	Выделение двухполюсника, последовательного приемнику напряжения УИ	

В строках 3–5, 7–9 табл. 3.3 оставляемый двухполюсник должен иметь в своем составе независимый источник энергии. Удаляемый

(стягиваемый) в строках 3–10 двухполюсник не содержит как приемников с искомым током или напряжением, так и независимых источников энергии. Рассмотренные эквивалентные упрощения доказываются в [189].

Общий алгоритм разложения схемного определителя состоит из следующей последовательности шагов:

1. Выделение параметров с максимальными ПУ (частные случаи формул (1.1), (1.2), (3.7)).

2. Выделение по формуле (1.4) определителей подсхем, имеющих с оставшейся частью схемы – второй подсхемой единственный общий узел.

3. Выделение по формуле (1.5) параметра подсхемы, имеющей с оставшейся частью схемы – второй подсхемой два общих узла. Вторая подсхема при этом является вырожденной или становится вырожденной в случае объединения внешних узлов.

4. Выделение нуллов, для которых существует операция стягивания, по формуле (3.8).

4.1. Выделение параметров нуллов, генератор и приемник которых имеют общий узел. Этот узел используется в качестве опорного узла.

4.2. Выделение параметров нуллов, норатор и нуллятор которых не имеют общего узла. В качестве опорных узлов используются узлы, параллельно которым не подсоединены u -ветви, или узлы, по отношению к которым норатор и нуллятор выделяемого нуллора имеют противоположную ориентацию.

5. Применение диакоптических формул Фойснера (1.4) и (1.5). Не допускается размещение одноименных генератора и приемника в различных подсхемах.

6. Выделение параметров УИ, для которых существует операция стягивания. Здесь среди названных УИ выбирается тот, который имеет наибольший ПУ. Если имеется более одного УИ с таким же ПУ (или его оценкой по правилу «минимума»), то в первую очередь выделяется тот, который имеет большую кратность, являясь результатом объединения большего числа УИ. Для уменьшения количества операций вычитания необходимо, чтобы в первую очередь выделялся УИ, генератор и приемник которого имеют общий узел и ориентированы противоположно по отношению к нему. Этот узел должен использоваться в качестве общего опорного узла.

7. Выделение параметров УИ, для которых не существует операции стягивания. Для этого выбирается УИ с учетом требований шага 4. Далее применяется формула (3.9), но вместо стягивания выделяемого УИ выполняется его преобразование в нуллов с соответствующим параметром.

8. Выделение параметров пассивных элементов. К этому времени в схеме не остается нуллов и УИ, то есть нет препятствий для реализации правил ПУ, кратности и половинного деления.

В результате работы алгоритма формируется вложенное выражение схемного определителя или обнаруживается вырожденность схемы. Изменяя взаимно порядок следования шагов, можно получить выражение с первоочередным выделением параметров выбранных элементов. Таким образом удастся управлять процессом формирования ССФ за счет увеличения числа вычитаний и изменения сложности выражения. Это полезно, например, в случаях нахождения функций чувствительности к изменениям заданных параметров, формирования символьно-численных и упрощенных выражений ССФ. Алгоритм реализован в программе *CIRSYM*, некоторые результаты использования которой приводятся ниже.

Анализ полных схем с ИТУН. В качестве пассивной подсхемы использовалась полная *u*-схема с восемью узлами (28 ветвей) [262]. К этой подсхеме поочередно подсоединяется одна из четырех активных подсхем, образованных ИТУН: 1) (12,34), (34,12), (56,78), (78,56); 2) (12,23), (13,34), (14,53), (15,56), (16,67), (17,78), (18,12); 3) (12,34), (34,56), (56,78), (78,12); 4) (12,34), (12,56), (12,78), (34,56), (34,78), (56,78). Первая пара номеров в скобках указывает узлы подключения генератора, а вторая – приемника ИТУН. Схемы, полученные в результате соединения пассивной подсхемы с первой, второй, третьей и четвертой активными подсхемами, далее обозначены соответственно *test1*, *test2*, *test3* и *test4*.

В строках табл. 3.4 приведены количества операций, требуемых в выражениях определителей полных схем с соответствующими активными подсхемами. Во втором, третьем и четвертом столбцах табл. 3.4 помещены показатели вложенных выражений схемных определителей, сформированных с помощью программы *CIRSYM*. Для сравнения в пятом и шестом столбцах этой таблицы указаны количества операций в развернутых выражениях при отображении рассматриваемых схем унисторными графами. Причем дубликации в этих выражениях сохранены, а в качестве базисного узла использован узел № 1.

Таблица 3.4

Схема	Вложенные выражения			Без свертки	
	Число “*”	Число “+”	Число “-”	Число “*”	Число “+”, “-”
<i>test1</i>	15559	26381	686	10080000	1439999
<i>test2</i>	18164	44442	63	5173245	739034
<i>test3</i>	15775	27480	595	10920000	1559999
<i>test4</i>	20537	33942	773	11289600	1612799

В табл. 3.5 приведены показатели сложности вложенных выражений определителей обсуждаемых четырех схем при их отображении унисторными графами и матрицами узловых проводимостей. В первом

случае использовалась программа *SYMB*, реализующая разложение унисторного графа по ветвям и дугам [24] (автор Д.В. Шеин).

Во втором случае применялась программа на основе рекурсивного разложения П.-С. Лапласа по строкам матрицы узловых проводимостей [283]. Полученные выражения графовых и матричных определителей содержат дубликации, устранение которых весьма трудоемко и приводит, как правило, к увеличению количества операций умножения и сложения, что подтверждает сравнение табл. 4 и 5.

Таблица 3.5

Схема	Унисторный граф			Матрица проводимостей		
	Умножения	Сложения	Вычитания	Умножения	Сложения	Вычитания
test1	6941	22327	2443	8659	14130	17227
test2	6399	21426	6193	8659	14136	17592
test3	13219	39582	6317	8659	14130	17227
test4	12382	46136	7563	8659	13448	16640

Анализ схемы полосового фильтра на базе идеальных ОУ. 32-узловая схема активного фильтра содержит 13 идеальных ОУ, 36 резисторов и 8 конденсаторов [82].

Четверть века эта схема используется для сравнения алгоритмов формирования ССФ, что нашло отражение в Интернет-сайте [295]. При этом в качестве объекта оптимизации выступает передаточная ССФ по напряжению указанной схемы. Применение промежуточной модели в виде унисторного графа (программа *SYMB*) не позволило выполнить анализ этой схемы без ее деления на подсхемы с тремя внешними узлами.

Компьютерная реализация метода стягивания и удаления ветвей в программе *CIRSYM* обеспечила формирование передаточной ССФ по напряжению в виде единого выражения, то есть с единственной операцией присваивания, без деления схемы рис. 3.5 на подсхемы. Показатели сложности сгенерированного программой *CIRSYM* выражения составили: 104 умножения, 11 вычитаний, 1 деление и 53 сложения.

В результате применения метода двоичных векторов в сочетании с оптимальным заданием ветвей (проводимостями или сопротивлениями) было получено последовательное выражение для передаточной ССФ по напряжению полосового фильтра, образованное 23 выражениями и требующее всего 30 умножений, 8 вычитаний, 9 делений, 22 сложения. Показатели этого выражения являются минимальными среди результатов решения теста *Стажика-Кончиковской* известными программами символьного анализа (1986-1997гг.), представленных на сайте «*Symbolic circuit analysis: Library of benchmark circuits*» [295]).

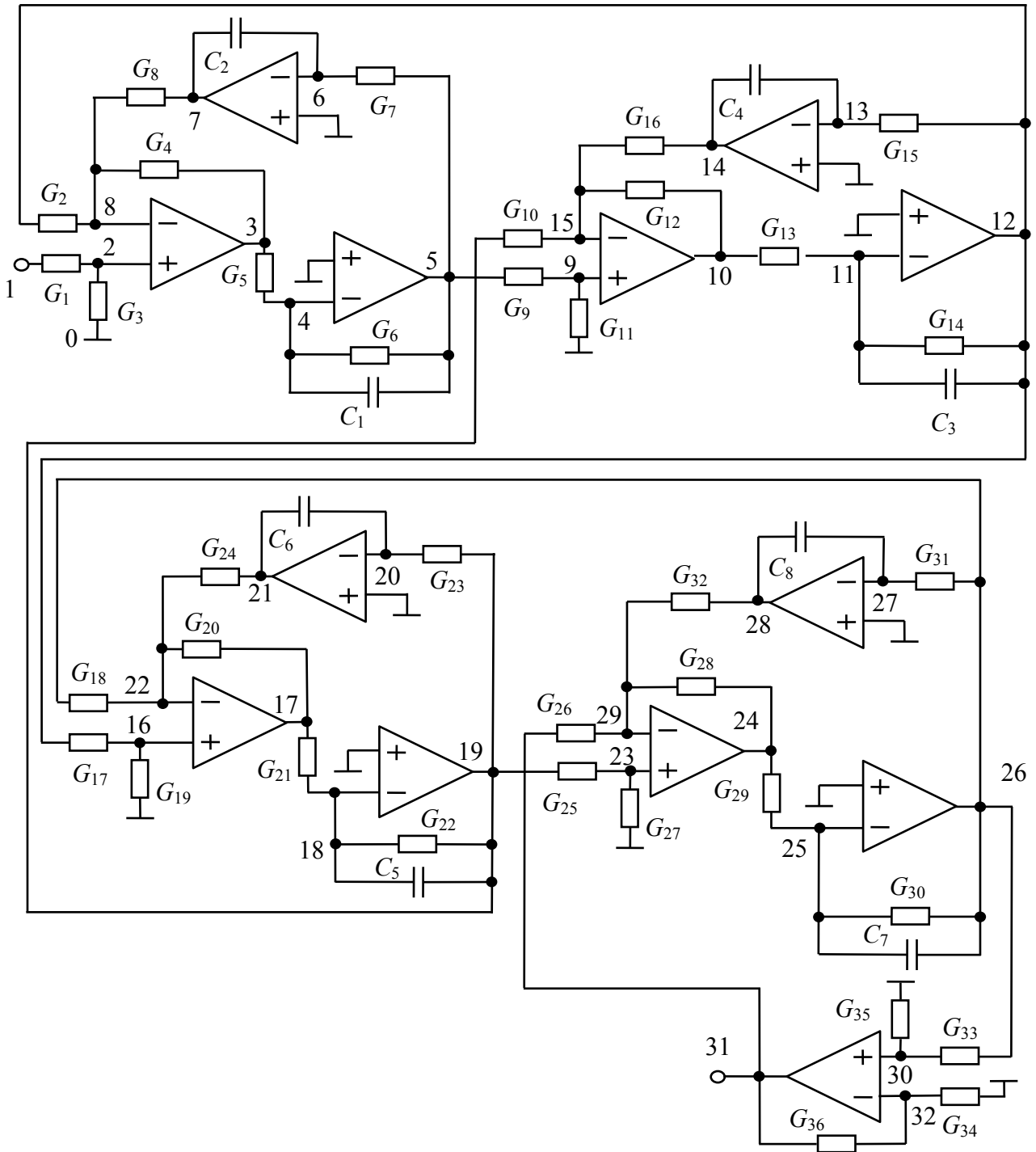


Рис. 3.3. Схема активного фильтра Старжики-Кончаковской [80]

Формула Filaretov2 заняла вторую позицию в рейтинге формул по вычислительной эффективности и перепечатана в трудах международного семинара «*Symbolic methods and applications in circuit design*» («Символьные методы и их применение в схемотехническом проектировании», Лиссабон, 2000) как пример компактной формулы [78]. В трудах этого же семинара показатели сложности оптимальных выражений, формируемых программой CIRSYM из пакета SYMBOL для

определителей полных электрических схем, признаны недостижимыми при использовании существующих пакетов и систем компьютерной алгебры (*R.Dmytryshyn*, Кайзерслаутерн, 1998).

Развитие и совершенствование МСО. Сравнительное исследование МСО с методом унисторного графа выполнил крупный специалист по символьному анализу и популяризатор наследия Фойснера Р.В. Дмитришин (СССР, Украина, Польша) [23–25, 150–159]. Начиная с 1999 года, к работе по исследованию и развитию МСО присоединились сотрудники Ульяновского Государственного Технического Университета: С.А. Курганов, К.С. Горшков, Ф.А. Королев, Ю.В. Токарев и Д.С. Курганов.

Выполненные исследования и разработки позволили усовершенствовать МСО и обобщить его для формирования оптимальных по сложности выражений откликов [119, 120, 222, 240, 259, 265] и полиномиальных схемных функций [204, 205], анализа схем со всеми типами многополюсных компонентов [184–186, 197, 198], символьного анализа сложных электрических цепей по частям [171, 173–175, 196, 199, 201, 208, 278] и с произвольным числом воздействий [43, 173, 176, 190, 194, 259], диагностики линейных электрических цепей [181, 183, 187, 191, 192, 196], аналитического решения систем линейных алгебраических уравнений [103, 118, 279], символьного анализа электронных цепей с переключаемыми конденсаторами [178, 179, 193, 209], реализации структурных схем электрических цепей на основе транскондуктивных усилителей [45, 46, 103, 112, 114, 115, 127, 128, 131, 146], нахождения цепных параметров многополюсников [186] и расчета функций чувствительности [200], формирования условия равновесия для мостовых электрических цепей [207], структурного синтеза электрических цепей по их символьным и полиномиальным схемным функциям [118, 123–125, 129–131, 135, 133, 147], допускового анализа ЛЭЦ (138, 143, 144) реализации эффективных программ символьного анализа [101, 124, 128, 130, 138, 139, 197, 205, 255, 256, 262, 271, 276, 280].

Критерием, который положен в основу сравнения предлагаемых и известных методов, в настоящее время является вычислительная сложность формируемых выражений ССФ, характеризующаяся количеством требуемых алгебраических операций [24, 261, 265]. Фундаментальный характер МСО придает то обстоятельство, что он был использован при доказательстве ряда известных и новых топологических преобразований электрических цепей [95, 110, 111, 113, 116–118, 132, 137, 139, 140–142, 146, 283, 284]. Доказательства на основе МСО характеризуются краткостью и наглядностью, инвариантностью к элементному базису, что выгодно отличает схемно-алгебраический аппарат от традиционного матричного аппарата [157, 282].

Метод схемных определителей использует свой собственный схемно-алгебраический аппарат и не нуждается в каком-либо другом математическом аппарате. Символьные выражения откликов тока и напряжения, параметров элементов получаются без использования традиционной процедуры решения уравнений, то есть проблема, поставленная еще Кирхгофом, получила, наконец, более или менее законченное и общее решение (формирование оптимальных выражений, анализ схем с произвольными линейными элементами, символьная диакоптика и диагностика) [172, 219, 285]. МСО положен в основу читаемых в Ульяновском Государственном Техническом Университете учебных курсов «Электротехника и электроника» и «Основы теории цепей». Начиная с 2001 года, было издано 6 учебных пособий [114, 135, 188, 189, 194, 196, 209] и 1 монография [118].

Начиная с 1999 года, своеобразным форумом для российских специалистов в области символьного анализа электрических цепей становится международная конференция «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике (КЛИН)», проводившаяся в Ульяновском Государственном Политехническом Университете с 2001 года по инициативе Л.И. Волгина, заслуженного деятеля науки и техники Российской Федерации. Все последние достижения в развитии схемного подхода в теории цепей и МСО были представлены на этой конференции.

3.6. Формирование полиномиальных схемных функций

Символьная полиномиальная схемная функция (ПСФ) записывается в виде

$$H(p) = \frac{\sum_{k=m_{\min}}^{m_{\max}} a_k p^k}{\sum_{k=n_{\min}}^{n_{\max}} b_k p^k}, \quad (3.12)$$

где p – оператор Лапласа; a_k, b_k – рациональные выражения, содержащие параметры элементов; m_{\max}, n_{\max} (m_{\min}, n_{\min}) – максимальные (минимальные) степени полиномов числителя и знаменателя соответственно. Такие функции используются широко при исследовании устойчивости, синтезе и проектировании электронных цепей [224].

Матричное формирование полиномиального коэффициента с номером k основано на теореме об определителе суммы матриц. Недостатком матричного подхода являются многочисленные взаимно уничтожающиеся слагаемые, возникающие из-за многократного повторения одного и того же параметра в элементах матрицы узловых проводимостей.

Более эффективными для построения символьных ПСФ являются топологические методы, которые формируют символьные выражения с меньшим, чем матричные методы, числом избыточных слагаемых. При использовании метода перемножения вершинных множеств направленного графа проводимостей [224] полиномиальные коэффициенты находятся путем сортировки слагаемых в развернутых символьных выражениях. Непосредственно – без сортировки слагаемых – позволяет находить полиномиальные коэффициенты метод разложения определителей по всем возможным сочетаниям емкостей и индуктивностей на базе двунаправленного (унисторного) графа проводимостей или сопротивлений. Недостаток топологических методов, также как и матричных методов, состоит в образовании избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых из-за использования унисторного представления УИ. Методика первоочередного выделения ветвей и пассивных дуг [258] позволяет упростить процедуру поиска и исключения избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых.

Создает также избыточные выражения, хотя и не использует унисторную схему замещения символьный алгоритм стягивания и удаления реактивных элементов [170]. Он основан на предельных безреактивных схемах замещения, получающихся из исходной схемы приравниваем части параметров реактивных элементов к нулю, а части – к бесконечности. Если индуктивность (емкость) равна нулю, то элемент заменяется идеальным проводником (разрывом), если же индуктивность (емкость) равна бесконечности, то элемент заменяется разрывом (проводником). Для схемы с d реактивными элементами при формировании k -го коэффициента знаменателя используется множество безреактивных схем, в которых все возможные сочетания из $(d-k)$ элементов имеют нулевой параметр, а $(k-1)$ элемент имеет бесконечные параметры. Оставшийся реактивный элемент удаляется из схемы и между его зажимами находится входное сопротивление или проводимость, которые являются составными частями искомого полиномиального коэффициента. Для определения k -го коэффициента числителя используются отмеченные выше входные сопротивления (проводимости) и выражения передаточной функции для соответствующих безреактивных схем, в которых не только $(k-1)$ реактивный элемент, но и k -ый параметр равен бесконечности. Недостатком алгоритма является представление каждого из полиномиальных коэффициентов в дробно-рациональном виде, что приводит к избыточным выражениям передаточной функции.

Для исключения избыточности и получения компактных выражений полиномиальных коэффициентов используются алгоритмы факторизации развернутых выражений путем рекурсивного вынесения за скобку символа, имеющего максимальный показатель участия [248]. Такой алгоритм реализован в программе SYMBOL. Его недостатком является применение

алгебраического критерия свертки, который не учитывает структурных особенностей анализируемой схемы, и требует большого объема памяти, поскольку работает с развернутыми алгебраическими выражениями.

Кроме рассмотренных общих алгоритмов используются и структурно-специализированные алгоритмы. Для полных пассивных схем, содержащих обобщенные параллельные ветви из проводимости G , емкости C и индуктивности с параметром $\Gamma = 1/L$, полиномиальные коэффициенты находятся на основе цепных ветвящихся произведений проводимостей ветвей [246]. Для пассивных RLC -схем из обобщенных z -ветвей в виде последовательного соединения сопротивления R , индуктивности L и емкости C коэффициенты полиномиальных функций получают табличным способом по определителю и алгебраическим дополнениям матрицы контурных сопротивлений [205]. Каждому полиномиальному коэффициенту в таблице соответствует один или несколько наборов типов (R, L, C) элементов. Число каждого набора элементов в коэффициенте определяется числом слагаемых в определителе. Индексы у параметров элементов в наборе совпадают с индексами у сопротивлений z . Недостатком структурно-специализированных алгоритмов является избыточность и ограниченная область их применения.

Не ограничивается структура и элементный состав схемы, а также не появляются избыточные взаимно уничтожающиеся слагаемые при использовании метода схемных определителей, который позволяет разложить схемный определитель по параметрам реактивных элементов [182]. Так, для цепи, содержащей УИ с действительными параметрами и n двухполюсных реактивных элементов (конденсаторов и катушек индуктивности), определитель числителя (знаменателя) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta = & p^n X_1 X_2 \dots X_n \Delta_{X_1, X_2, \dots, X_n} + p^{n-1} (X_1 X_2 \dots X_{n-1} \Delta_{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}}^{X_n} + X_1 X_2 \dots X_{n-2} X_n \cdot \\ & \cdot \Delta_{X_1, X_2, \dots, X_{n-2}, X_n}^{X_{n-1}} + \dots + X_2 X_3 \dots X_n \Delta_{X_2, X_3, \dots, X_n}^{X_1}) + \dots + p (X_1 \Delta_{X_1}^{X_2, X_3, \dots, X_n} + \\ & + X_2 \Delta_{X_2}^{X_1, X_3, X_4, \dots, X_n} + \dots + X_n \Delta_{X_n}^{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}}) + \Delta^{X_1, X_2, \dots, X_n}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где X_1, X_2, \dots, X_n – параметры реактивного элемента (емкости или индуктивности); Δ с индексами – это определитель безреактивной схемы, полученной из исходной схемы путем нейтрализации и/или выделения реактивных элементов, при этом в верхнем индексе приводятся реактивные параметры, которые нейтрализуются – приравниваются к нулю, а в нижнем индексе – параметры, которые выделяются в виде множителя. Нейтрализация индуктивности (емкости) выполняется заменой ее на идеальный проводник (удалением из схемы). Выделение индуктивности (емкости) сопровождается удалением ее из схемы (заменой проводником).

В формуле (3.13) при нахождении произвольного k -го коэффициента учитываются все возможные сочетания по k из n реактивных элементов

$$N_k = n!/(k!(n-k)!). \quad (3.14)$$

Число N_k равно количеству схемных определителей в схемно-алгебраическом выражении k -го коэффициента (3.13). Для реальных цепей число схемных определителей значительно меньше, поскольку многие из них вырождены – равны нулю.

Основы алгоритма. Для получения в символьном выражении только положительных степеней оператора p конденсаторы представляются в схеме проводимостями, а катушки индуктивности – сопротивлениями. Каждый полиномиальный коэффициент числителя (знаменателя) формируется независимо друг от друга на основе одной и той же схемы числителя (знаменателя).

Коэффициенты формируются в свернутом виде с учетом правил оптимального построения выражений, при этом в первую очередь учитываются элементы, подлежащие нейтрализации или выделению по частным формулам (содержащим одно из двух слагаемых) и реактивные элементы по формулам [22]. Степень слагаемых определителя контролируется неявным образом – без развертывания выражений – на основе показателя степени, который присваивается каждой паре скобок. Она появляется после выделения любого элемента. Причем при выделении конденсаторов и катушек индуктивности вновь образующейся паре скобок присваивается показатель степени на единицу больший, чем у ближайшей внешней пары скобок. При выделении резистивных элементов и управляемых источников показатель степени у вновь появляющейся пары скобок будет такой же, как и у ближайшей внешней пары скобок.

Если показатель степени скобок превышает степень искомого полиномиального коэффициента, то эта пара скобок вместе с соответствующим схемно-алгебраическим фрагментом стирается из памяти. Стирается также выражение, степень которого заведомо меньше искомой. Оставшиеся безреактивные схемные определители в скобках с искомым показателем степени преобразуются к символьным выражениям с применением диакоптического метода схемных миноров (двоичных векторов) [278].

Последовательность операций алгоритма для нахождения k -го коэффициента полинома числителя или знаменателя.

А. Найти в соответствии с выше отмеченными правилами схему числителя (знаменателя). В дальнейшем схема числителя или знаменателя для краткости называется просто схемой.

Б. Установить номер коэффициента $k = n_{min} \dots n_{max}$. Максимальная (минимальная) степень полинома $n_{max} \leq n_C + n_L$ ($n_{min} \geq 0$) определяется по

алгоритму [190]. Обозначения: n_C, n_L – число конденсаторов и катушек индуктивности соответственно.

В. Выполнить эквивалентные преобразования для параллельных резистивных проводимостей $g = g_i + g_j$ и емкостей $c = c_i + c_j$, последовательных индуктивностей $L = L_i + L_j$ и резистивных сопротивлений $R = R_i + R_j$, а также для параллельных источников тока, управляемых напряжением, и последовательных источников напряжения, управляемых током.

Г. Нейтрализовать все n элементов (резисторов, конденсаторов, катушек индуктивности и УИ), которые могут быть нейтрализованы по частным формулам, содержащим одно из двух слагаемых, в результате определитель преобразуется к виду

$$\Delta = \Delta^{P_{N(1)}, P_{N(2)}, \dots, P_{N(n)}}, \quad (3.15)$$

где N – вектор номеров элементов, подлежащих нейтрализации (параметры элементов приравниваются к нулю); P_i – параметр i -го элемента.

Д. Выделить все s элементов, для которых выполняются условия выделения по частным формулам, содержащим одно из двух слагаемых [17]. В результате определитель примет вид

$$\Delta = \prod_i^s P_{S(i)} ([t_1] ([t_1+t_2] \dots ([\sum_i^s t_i] \Delta_{P_{S(1)}, P_{S(2)}, \dots, P_{S(s)}}^{P_{N(1)}, P_{N(2)}, \dots, P_{N(n)}} [\sum_i^s t_i] \dots [t_1+t_2]) [t_1]), \quad (3.16)$$

где i – номер выделенного элемента; $s = 0, 1, \dots$ – число выделенных элементов; S – вектор номеров элементов, выделенных по частным формулам; $P_{S(i)}$ – параметр i -го элемента из вектора S ; $t_i = 1$, если i -й элемент – катушка индуктивности или конденсатор, иначе $t_i = 0$; $[t_1], [t_2], \dots, [\sum_i t_i]$ – показатели степени скобки. Из s пар кратных скобок в (3.16)

оставляется только одна внутренняя пара скобок, все остальные стираются.

Обозначим $S_t = \sum_i t_i$ и $\underline{\Delta} = \Delta_{P_{S(1)}, P_{S(2)}, \dots, P_{S(s)} \rightarrow \infty}^{P_{N(1)}, P_{N(2)}, \dots, P_{N(n)} \rightarrow 0}$. В результате формула (3.16) приводится к виду

$$\Delta = \prod_i^s P_{S(i)} ([S_t] \underline{\Delta} [S_t]).$$

Е. Положить номер $m = 1$ реактивного элемента, выделяемого по общей формуле. Элемент выбирается по правилам показателей участия и кратности, изложенных выше.

Ж. Выделить реактивный элемент (конденсатор или катушку индуктивности) с номером m по общей формуле, что и в п. Е. Получить выражение определителя

$$\begin{aligned}
 \Delta = & \prod_i^s P_{S(i)} \left([S_i] P_{X(1)} \left([S_i+1] P_{X(2)} \left([S_i+2] \dots P_{X(m-1)} \left([S_i+m-1] P_{X(m)} \left([S_i+m] \Delta_{P_{X(1)}, P_{X(2)}, \dots, P_{X(m)}}^{[S_i+m]} \right) + \right. \right. \right. \\
 & + \Delta_{P_{X(1)}, P_{X(2)}, \dots, P_{X(m-1)}}^{P_{X(m)} [S_i+m-1]} \right) + P_{X(m)} \left([S_i+m-1] \Delta_{P_{X(1)}, P_{X(2)}, \dots, P_{X(m-2)}, X_m}^{P_{X(m-1)} [S_i+m-1]} \right) + \\
 & + \Delta_{P_{X(1)}, P_{X(2)}, \dots, P_{X(m-2)}}^{P_{X(m-1)}, P_{X(m)} [S_i+m-2]} \right) + \dots + \Delta_{P_{X(1)}, P_{X(2)}}^{P_{X(3)}, P_{X(4)}, \dots, P_{X(m)} [S_i+2]} \right) + \Delta_{P_{X(1)}}^{P_{X(2)}, P_{X(3)}, \dots, P_{X(m)} [S_i+1]} \right) + \\
 & + P_{X(2)} \left([S_i+1] P_{X(3)} \left([S_i+2] \dots P_{X(m-1)} \left([S_i+m-2] P_{X(m)} \left([S_i+m-1] \Delta_{P_{X(1)}, P_{X(2)}, \dots, P_{X(m)}}^{[S_i+m-1]} \right) + \right. \right. \right. \\
 & + \Delta_{P_{X(2)}, P_{X(3)}, \dots, P_{X(m-1)}}^{P_{X(1)}, P_{X(m)} [S_i+m-2]} \right) + P_{X(m)} \left([S_i+m-2] \Delta_{P_{X(2)}, P_{X(3)}, \dots, P_{X(m-2)}, X(m)}^{P_{X(1)}, P_{X(m-1)} [S_i+m-2]} \right) + \\
 & + \Delta_{P_{X(2)}, P_{X(3)}}^{P_{X(1)}, P_{X(4)}, P_{X(5)}, \dots, P_{X(m)} [S_i+2]} \right) + \dots + \Delta_{P_{X(2)}}^{P_{X(1)}, P_{X(3)}, P_{X(4)}, \dots, P_{X(m)} [S_i+1]} \right) + \dots + \Delta_{P_{X(1)}}^{P_{X(2)}, P_{X(3)}, P_{X(4)}, \dots, P_{X(m)}},
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

где $X(m)$ – вектор номеров реактивных элементов, выделяемых по общим формулам; $P_{X(m)}$ – параметр элемента с номером m .

З. Проверить схему по пунктам Г и Д на наличие элементов, которые могут быть выделены или нейтрализованы по частным формулам.

И. Проверить показатели степени скобок на предмет превышения числа k . В этом случае пара скобок с соответствующим выражением исключается из формулы.

К. Положить $m = m + 1$, если $m \leq n_c + n_L$, то перейти к п. Ж.

Л. Раскрыть оставшиеся схемные определители (они не содержат реактивных элементов) по частям с использованием диакоптических методов [278].

Полученное в результате выполнения изложенного алгоритма символьное выражение является искомым коэффициентом a_k .

Пример нахождения полиномиальных коэффициентов ARC-фильтра. Рассмотрим схему фильтра на идеальном операционном усилителе (рис. 3.4,а), его нуллорная схема замещения приведена на рис. 3.4,б [18].

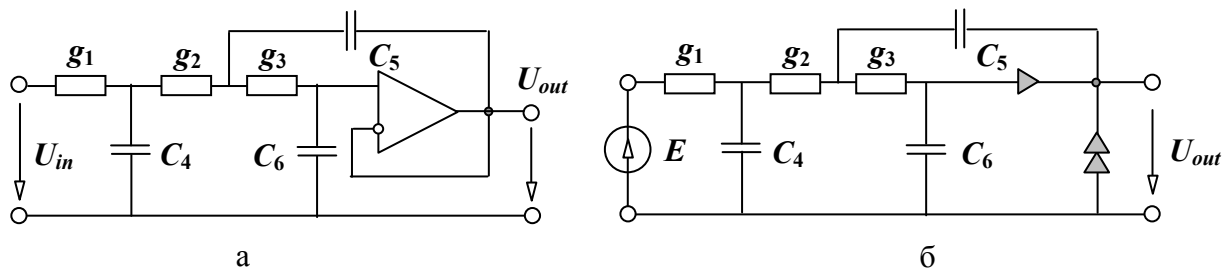


Рис. 3.4. ARC-фильтр третьего порядка с идеальным операционным усилителем (а), его схема замещения (б)

Запишем определитель схемы знаменателя, которая получается из схемы на рис. 3.4,б нейтрализацией источника и приемника напряжения

$$D = \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_5 \\ \hline \begin{array}{c} g_2 \quad g_3 \\ \hline g_1 \quad C_4 \quad C_6 \end{array} \end{array} \right| \cdot \quad (3.18)$$

Найдем коэффициент b_3 . Для этого выделим проводимость конденсатора C_5 , в результате определитель имеет вид

$$D = C_5 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline \begin{array}{c} g_2 \quad g_3 \\ \hline g_1 \quad C_4 \quad C_6 \end{array} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \begin{array}{c} g_2 \quad g_3 \\ \hline g_1 \quad C_4 \quad C_6 \end{array} \\ \hline 1 \end{array} \right]$$

Второй схемный определитель стирается, поскольку содержит только два реактивных элемента. В первом определителе удалим проводимость g_3 и выделим конденсатор C_6 , учитывая, что при его нейтрализации получается нулевое слагаемое. В результате получим

$$D = C_5 \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \left[\begin{array}{c} g_2 \\ \hline g_1 \quad C_4 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \left. \right) \end{array}$$

Выделим конденсатор C_4 , в результате

$$D = C_5 \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \left[C_6 \right] \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \left[C_4 \right] \end{array} \left[\begin{array}{c} \begin{array}{c} g_1 \quad g_2 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \begin{array}{c} g_1 \quad g_2 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right] \begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \left. \right) \end{array}$$

Второе слагаемое здесь стирается, поскольку оно не содержит реактивных элементов и не позволяет получить третью степень оператора p . Первый схемный определитель равен единице, то есть

$$D = C_5 \left({}^{[1]}C_6 \left({}^{[2]}C_4 \left({}^{[3]}1 \right) \right) \right) \left. \right)^{[2]} \left. \right)^{[1]}.$$

Последнее выражение является выражением для искомого полиномиального коэффициента знаменателя b_3 .

Аналогично находятся остальные коэффициенты для полинома знаменателя:

$$b_2 = C_6 [C_5(g_1 + g_2) + C_4(g_2 + g_3)]; \quad b_1 = C_4 g_2 g_3 + C_6(g_1(g_2 + g_3) + g_2 g_3);$$

$$b_0 = g_1 g_2 g_3.$$

Исследуем определитель схемы числителя

$$N = \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{Circuit diagram for } N \end{array} \\ \end{array} \right| \quad (3.19)$$

Схема содержит вырожденный контур из конденсатора и двух нуллаторов. После применения частной формулы выделения проводимости g_1 появляется второй вырожденный контур из норатора-2 и конденсатора C_4 , а после выделения g_2 – третий вырожденный контур из двух нораторов и конденсатора C_5 . Таким образом, в соответствии с алгоритмом [204] максимальная степень числителя равна нулю.

Находим коэффициент a_0 . Для этого удаляем из формулы (3.19) все конденсаторы, выделяем проводимости g_1 , g_2 и g_3 , которые включены последовательно с норатором. Поменяем взаимно с учетом изменения знака определителя номера у норатора, заменим идеальным проводником (также с учетом изменения знака) параллельное встречное соединение одноименных нораторов и нуллаторов. Определитель оставшегося параллельного соединения одноименных нораторов и нуллаторов равен 1. Таким образом, коэффициент

$$a_0 = g_1 g_2 g_3.$$

Реализация алгоритма и тестирование программы. Предлагаемый алгоритм реализован Дмитрием Кургановым с использованием 32-разрядного компилятора с языка СИ (Borland C++Builder 6) в виде программы CIRSWM32, которая включена в состав системы символьного анализа и диагностики SCAD [101] и системы моделирования электронных цепей Fastmean [294].

Программа протестирована (на компьютере с частотой 3 ГГц) на многосвязных лестничных фильтрах (рис. 3.5) и схемах замещения трехпроводных линий [205] (рис. 3.6), для которых показатели сложности полиномиальных передаточных функций приведены в табл. 3.6 и табл. 3.7 соответственно. Для примера приведем полиномиальную функцию, полученную по программе CIRSWM32, для 5-звенного фильтра

$$\begin{aligned}
K = 1/ & \\
& (p^{10} * (c6 * (c2 * ((L1 + L6) * (c3 * ((L2 + L7) * (c4 * ((L3 + L8) * (c5 * ((L4 + L9) * \\
& (L5 + L10)))))))))) + \\
& p^8 * (c6 * (c2 * ((L1 + L6) * (c3 * ((L2 + L7) * (c4 * ((L3 + L8) * (L4 + L9 + L5 + L10))) + c5 * ((L3 + L \\
& 8 + L4 + L9) * (L5 + L10)))))) + c4 * ((L2 + L7 + L3 + L8) * (c5 * ((L4 + L9) * (L5 + L10)))))) + c3 * ((L \\
& 1 + L6 + L2 + L7) * (c4 * ((L3 + L8) * (c5 * ((L4 + L9) * (L5 + L10)))))) + c5 * (c2 * ((L1 + L6) * (c3 * \\
& ((L2 + L7) * (c4 * ((L3 + L8) * (L4 + L9)))))) + \\
& + p^6 * (c6 * (c2 * ((L1 + L6) * (c3 * ((L2 + L7) * (L3 + L8 + L4 + L9 + L5 + L10))) + c4 * ((L2 + L7 + \\
& L3 + L8) * (L4 + L9 + L5 + L10))) + c5 * ((L2 + L7 + L3 + L8 + L4 + L9) \\
& * (L5 + L10)))) + c3 * ((L1 + L6 + L2 + L7) * (c4 * ((L3 + L8) * (L4 + L9 + L5 + L10))) \\
& + c5 * ((L3 + L8 + L4 + L9) * (L5 + L10)))) + c4 * ((L1 + L6 + L2 + L7 + L3 + L8) \\
& * (c5 * ((L4 + L9) * (L5 + L10)))) + c5 * (c2 * ((L1 + L6) * (c3 * ((L2 + L7) \\
& * (L3 + L8 + L4 + L9))) + c4 * ((L2 + L7 + L3 + L8) * (L4 + L9)))) + c3 * \\
& ((L1 + L6 + L2 + L7) * (c4 * ((L3 + L8) * (L4 + L9)))) + c4 * (c2 * ((L1 + L6) * (c3 * ((L2 + L7) * (L3 \\
& + L8)))))) \\
& + p^4 * (c6 * (c2 * ((L1 + L6) * (L2 + L7 + L3 + L8 + L4 + L9 + L5 + L10))) + c3 * ((L1 + L6 + L2 + L7) \\
& * (L3 + L8 + L4 + L9 + L5 + L10))) + c4 * ((L1 + L6 + L2 + L7 + L3 + L8) * (L4 + L9 + L5 + L10))) + c5 \\
& * ((L1 + L6 + L2 + L7 + L3 + L8 + L4 + L9) \\
& * (L5 + L10))) + c5 * (c2 * ((L1 + L6) * (L2 + L7 + L3 + L8 + L4 + L9))) \\
& + c3 * ((L1 + L6 + L2 + L7) * (L3 + L8 + L4 + L9))) + \\
& c4 * ((L1 + L6 + L2 + L7 + L3 + L8) * (L4 + L9))) + c4 * (c2 * ((L1 + L6) \\
& * (L2 + L7 + L3 + L8))) + c3 * ((L1 + L6 + L2 + L7) * (L3 + L8))) \\
& + c3 * (c2 * ((L1 + L6) * (L2 + L7))) \\
& + p^2 * (c6 * (L1 + L6 + L2 + L7 + L3 + L8 + L4 + L9 + L5 + L10)) + c5 * (L1 + L6 + L2 + L7 + \\
& L3 + L8 + L4 + L9) + c4 * \\
& (L1 + L6 + L2 + L7 + L3 + L8) + c3 * (L1 + L6 + L2 + L7) + c2 * (L1 + L6) \\
& + 1).
\end{aligned}$$

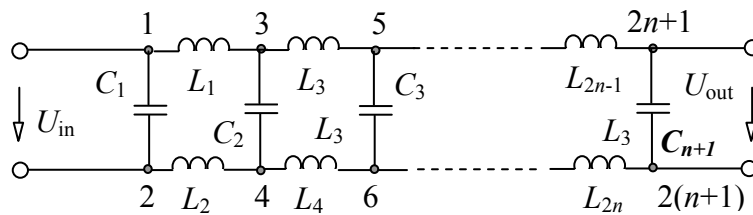


Рис. 3.5. Лестничный LC-фильтр

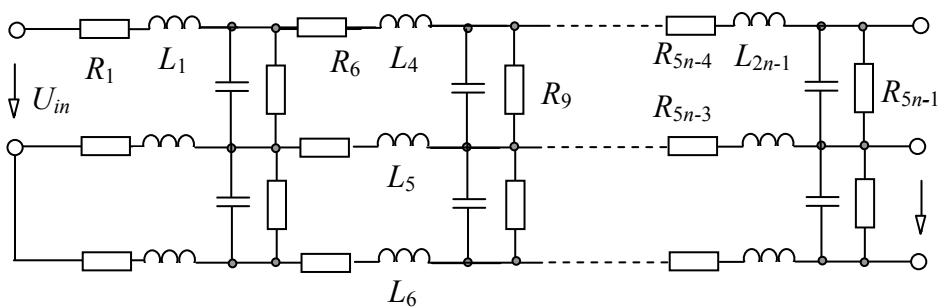
Рис. 3.6. Схема замещения трехпроводной линии (n – число звеньев)

Таблица 3.6. Показатели сложности многозвенных лестничных LC-фильтров и их полиномиальных функций, полученных по программе CIRSYMW32

Звеньев n	Количество					
	узлов	C	L	*	+	()
1	4	2	2	3	2	2
2	6	3	4	12	9	6
3	8	4	6	29	30	16
4	10	5	8	62	80	39
5	12	6	10	130	201	90
6	14	7	12	262	468	195
7	16	8	14	536	1040	411
8	18	9	16	1041	2235	850
9	20	10	18	2037	4680	1727
10	22	11	20	4128	9685	3517
11	24	12	22	8254	19779	7237
12	26	13	24	16519	40090	19503
13	28	14	26	32944	80852	44058
14	30	15	28	65724	162543	93185
15	32	16	30	131296	326124	191462
16	34	17	32	262388	653515	392923

Из табл. 3.6 и 3.7 следует, что программа CIRSYMW32 позволяет анализировать лестничные цепи сложностью до 32-порядка, а схемы замещения трехпроводных линий до 20-го порядка. При анализе схем замещения линий установлено (табл. 3.7), что применение диакоптики уменьшает число операций умножения и сложения в 1,1... 1,5 раза.

Однако использование диакоптики приводит к появлению несуществующих, тождественно равных нулю, полиномиальных коэффициентов. Так, при анализе трехзвенной схемы замещения трехпроводной линии с использованием трехузловой бисекции появляются полиномиальные коэффициенты числителя с номерами 11 и 12, которые тождественно равны нулю. Это выявляется, например, при использовании двух- и одноузловой диакоптики, которая, как известно, не дает избыточных слагаемых. Поэтому перед формированием полиномиальных коэффициентов желательно найти максимальную и минимальную степени полиномов [205]. В данном случае максимальная степень числителя – 10.

Тестирование программы проводилось также на ARC-фильтрах. Полиномиальная функция для полосового фильтра [278, 295], которая содержит 13 идеальных ОУ, 36 резисторов и 8 конденсаторов, имеет вид

$$K = a_4 p^4 / (b_8 p^8 + b_7 p^7 + \dots + b_0).$$

Ее коэффициенты включают 8863 умножений и 2526 сложений.

Таблица 3.7. Сравнение полиномиальных функций трехпроводных лестничных *RLC*-схем, полученных с помощью диакоптики и без ее применения

Сложность схемы				Число операций с диакоптикой (без диакоптики)		
звеньев	n_C	n_L	порядок	*	+	()
1	2	3	4	74 (86)	64 (67)	41 (41)
2	4	6	8	2427 (2823)	3406 (3414)	2317 (2984)
3	6	9	12	99888 (126539)	143779 (168683)	116635 (133777)
4	8	12	16	3547597 (5311168)	5335177 (7828368)	4382289 (4974276)
5	10	15	20	121787771 (-)	188559190 (-)	154331534 (-)
(-) – получить не удастся из-за слишком больших затрат времени						

Исследования показали, что программа CIRSYMW32 превосходит известные программы формирования полиномиальных схемных функций SAPWIN [296] и SYMBOL, возможности которых ограничены лестничными фильтрами с 4-мя звеньями и схемами замещения трехпроводных линий, содержащими не более 2-х звеньев. Программы SAPWIN и SYMBOL не позволяют также получить полиномиальную функцию для упомянутого выше *ARC*-фильтра восьмого порядка. При этом возникает ошибка памяти, которая объясняется использованием в этих программах алгоритма развертывания символьных выражений и сортировки слагаемых, требующего больших затрат памяти. Аналогичный алгоритм используют символьные блоки математических систем общего назначения, возможности которых соответствуют возможностям программ SAPWIN и SYMBOL – они не позволяют решать символьные системы уравнений сложнее 10-го порядка.

Программа CIRSYMW32 превосходит и 16-разрядную программу CIRSYMW, основанную также на методе схемных определителей и рекурсивном выделении параметров, но не использующую первоочередное выделение реактивных параметров и последующий расчет определителей по частям. Программа CIRSYMW позволяет анализировать схемы сложностью до 6...8 порядка в зависимости от их элементного состава.

3.7. Формирование дробных выражений схемных функций и их применение для допускового анализа

Схемно-алгебраическая интерпретация и обобщение формул Миддлбрука. Обычно ССФ представляется в дробно-рациональном виде. Однако для проектирования линейных электрических цепей целесообразно использовать выражение ССФ в виде функции преобразования [114]:

$$S = S_0(1 + \gamma), \quad (3.20)$$

где S_0 – номинальный коэффициент передачи, γ – относительная мультипликативная погрешность. Если обе величины S_0 и γ представлены в виде функций, то они образуют так называемое дробное выражение ССФ, поскольку второй сомножитель в символьном виде также строится на основе дробно-рациональных выражений.

Популярным методом формирования дробных выражений ССФ в США и Великобритании является методика, разработанная Р.Д. Миддлбруком [63, 64, 87, 88] и названная автором «теоремой экстра элемента» (под «экстра элементом» здесь понимается выделяемый элемент, от английского слова «extraction», то есть «выделение»). Подход Миддлбрука к символьному анализу цепей получил довольно широкое распространение среди специалистов и вошел в учебные курсы ряда университетов: Колорадо (http://ece.colorado.edu/~ecen5807/course_material), Вирджиния (<http://www.vt.edu>), Кембридж (<http://www.cambridge.org>).

Обоснование методики формирования дробных выражений ССФ, представленное в оригинале у авторов [63, 64, 87, 88], базируется на теореме билнейной трансформации Боде [4] и выполняется на основе a -параметров 2×2 -полюсников, не является строгим, поскольку не использует понятие нуллора. В работе [144] представлена строгая схемно-алгебраическая интерпретация формул Миддлбрука.

Нахождение коэффициента передачи S линейной электрической цепи по Миддлбруку проходит в три этапа: 1) в исходной схеме рассматриваются узлы и сечения, которым инцидентно минимальное количество элементов, выбирается элемент χ , принадлежащий множеству $\chi_i \in \{R, g, K, G, H, B\}$, параметр которого задается стремящимся или к бесконечности $\chi \rightarrow \infty$ (сопротивление удаляется, проводимость стягивается, УИ заменяется на нуллор) или к нулю $\chi \rightarrow 0$ (сопротивление стягивается, проводимость удаляется, УИ нейтрализуется). Формируется номинальная передаточная функция $S_0 = N^\chi / D_\chi$ или $S'_0 = N_\chi / D^\chi$ соответственно, где N^χ и N_χ – определители схем, в которых элемент $\chi \rightarrow \infty$; D^χ и D_χ – определители схем, в которых элемент $\chi \rightarrow 0$; 2) находится функция $Z_0^{(\chi)} = N_\chi / N^\chi$ или

$Z_0^{(\chi)} = N^\chi / N_\chi$; 3) вычисляется функция $Z^{(\chi)} = D_\chi / D^\chi$ или $Z'^{(\chi)} = D^\chi / D_\chi$. Тогда искомая функция S может быть найдена по одной из формул:

$$S = S_0 \frac{\chi + Z_0^{(\chi)}}{\chi + Z^{(\chi)}}, \quad (3.21)$$

$$S = S'_0 \frac{1 + \chi Z_0'^{(\chi)}}{1 + \chi Z'^{(\chi)}}. \quad (3.22)$$

В оригинальной работе [63] приводятся по две формулы, аналогичные по смыслу выражениям (3.21) и (3.22), для параметров пассивных элементов и УИ. Количественная избыточность формул Миддлбука стала следствием того, что значение номинального коэффициента передачи в формулах для сопротивления или проводимости (где S_0 находится при $\chi \rightarrow \infty$, а S'_0 при $\chi \rightarrow 0$) принято противоположным по отношению к значению в формулах для УИ (где S_0 находится при $\chi \rightarrow 0$, а S'_0 при $\chi \rightarrow \infty$). Таким образом выражения (3.21)–(3.22) обобщают четыре формулы, представленные в трудах Миддлбука и его последователей [63, 64, 87, 88].

При формировании дробного символьного выражения коэффициента передачи электрической цепи по формуле (3.21)–(3.22) для нахождения номинальных коэффициентов S_0 и S'_0 следует использовать САФ представленные на рис. 3.2.

Схемно-алгебраические формулы $Z_0^{(\chi)}$ и $Z^{(\chi)}$ ($Z_0'^{(\chi)}$ и $Z'^{(\chi)}$) для формирования дробного выражения входного сопротивления. Проиллюстрируем процесс нахождения функций $Z_0^{(\chi)}$ и $Z^{(\chi)}$ ($Z_0'^{(\chi)}$ и $Z'^{(\chi)}$) на примере формирования дробного выражения для входного сопротивления. Представим эти функции в виде САВ в случае применения формул (3.21) и (3.22) для сопротивления, проводимости и четырех типов УИ, запишем их в табл. 3.8 и табл. 3.9 соответственно.

Здесь независимые источники и приемники на внешних полюсах схемы заменены на нулоры для $Z_0^{(\chi)}$ в табл. 3.8 и $Z_0'^{(\chi)}$ в табл. 3.9, и нейтрализованы для $Z^{(\chi)}$ в табл. 3.8 и $Z'^{(\chi)}$ в табл. 3.9, согласно знаменателю и числителю САФ входного сопротивления (рис. 3.2,е). На внутренних узлах элемент χ в знаменателе $Z_0^{(\chi)}$, $Z'^{(\chi)}$, $Z^{(\chi)}$ и $Z_0'^{(\chi)}$ заменяется на короткую для сопротивления, разрыв для проводимости и нулор для УИ, а в числителе нейтрализуется.

Табл.3.8. Нахождение функций $Z_0^{(\chi)}$ и $Z^{(\chi)}$ для получения ССФ входного сопротивления

χ	$Z_0^{(\chi)}$	$Z^{(\chi)}$
R		
g		
K		
G		
H		
B		

Табл. 3.9. Нахождение $Z_0^{(\chi)}$ и $Z^{(\chi)}$ для получения ССФ входного сопротивления

χ	$Z_0^{(\chi)}$	$Z^{(\chi)}$
R		
g		
K		
G		
H		
B		

Табл.3.10. Нахождение $Z_0^{(\chi)}$ и $Z^{(\chi)}$ для получения передаточного сопротивления

X	$Z_0^{(\chi)}$	$Z^{(\chi)}$
R		
g		
K		
G		
H		
B		

Табл. 3.11. Нахождение $Z_0'^{(\chi)}$ и $Z'^{(\chi)}$ для получения передаточного сопротивления

χ	$Z_0'^{(n)}$	$Z'^{(n)}$
R		
g		
K		
G		
H		
B		

Схемно-алгебраические формулы $Z_0^{(\chi)}$ и $Z^{\{\chi\}}$ ($Z_0'^{(\chi)}$ и $Z'^{(\chi)}$) для формирования дробного выражения передаточного сопротивления. Запишем в схемно-алгебраическом виде функции $Z_0^{(\chi)}$ и $Z^{\{\chi\}}$ ($Z_0'^{(\chi)}$ и $Z'^{(\chi)}$) образующиеся в результате применения формул (3.21) и (3.22) при формировании дробного выражения передаточного сопротивления в табл. 3.10 и табл. 3.11 соответственно, аналогично тому, как мы это сделали в случае входного сопротивления. Независимые источники и приемники на внешних полюсах схемы заменены на нуллы для $Z_0^{(\chi)}$ в табл. 3.10 и $Z_0'^{(\chi)}$ в табл. 3.11, и нейтрализованы для $Z^{(\chi)}$ в табл. 3.10 и $Z'^{(\chi)}$ в табл. 3.11, согласно знаменателю и числителю САФ передаточного сопротивления, (рис. 3.2,в). На внутренних узлах элемент χ в знаменателе $Z_0^{(\chi)}$, $Z_0'^{(\chi)}$, $Z^{(\chi)}$ и $Z'^{(\chi)}$ заменяется на идеальный проводник для сопротивления, разрыв для проводимости и нуллы для УИ, согласно, а в числителе нейтрализуется.

Представление дробных выражений через схемные определители. Недостатком формул (3.21)–(3.22) является необходимость вычисления трех ССФ или шести схемных определителей

$$S = \frac{N^\chi}{D^\chi} \frac{\chi + \frac{N_\chi}{N^\chi}}{\chi + \frac{D_\chi}{D^\chi}}, \quad (3.23) \quad S = \frac{N_\chi}{D_\chi} \frac{1 + \chi \frac{N^\chi}{N_\chi}}{1 + \chi \frac{D^\chi}{D_\chi}}. \quad (3.24)$$

Как видно, среди схемных определителей имеются две пары одинаковых. Поэтому для получения дробного выражения достаточно найти четыре схемных определителя: N^χ , D^χ , N_χ и D_χ . Для этого можно использовать программу *cirsym*, входящую в состав системы SCAD.

Для получения дробных символьных выражений коэффициентов преобразования относительно параметров n элементов, предлагается использовать следующие формулы:

$$S = S_0 \frac{\chi_1 \frac{N^{\chi_1}}{\chi_{2,\dots,n}} + \dots + \chi_n \frac{N^{\chi_n}}{\chi_{1,2,\dots,n-1}} + \chi_1 \chi_2 \frac{N^{\chi_{1,2}}}{\chi_{3,\dots,n}} + \dots + \chi_1 \chi_2 \dots \chi_n + \frac{N^{\chi_{(1,2,\dots,n)}}}{\chi_{(1,2,\dots,n)}}}{\chi_1 \frac{D^{\chi_1}}{\chi_{2,\dots,n}} + \dots + \chi_n \frac{D^{\chi_n}}{\chi_{1,2,\dots,n-1}} + \chi_1 \chi_2 \frac{D^{\chi_{1,2}}}{\chi_{3,\dots,n}} + \dots + \chi_1 \chi_2 \dots \chi_n + \frac{D^{\chi_{(1,2,\dots,n)}}}{\chi_{(1,2,\dots,n)}}}, \quad (3.25)$$

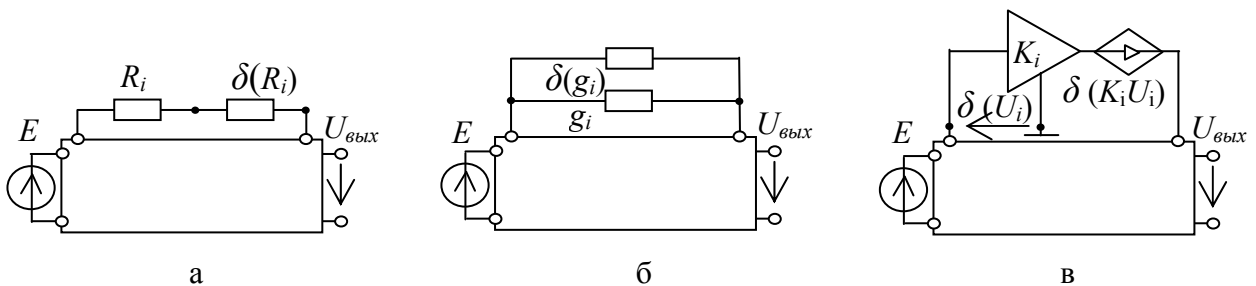
$$\text{где } S_0 = \frac{N^{\chi_{1,2,\dots,n}}}{D^{\chi_{1,2,\dots,n}}}.$$

$$S = S'_0 \frac{1 + \chi_1 \frac{N^{\chi_1}}{N^{\chi_{1,2,\dots,n}}} + \dots + \chi_n \frac{N^{\chi_n}}{N^{\chi_{1,2,\dots,n-1}}} + \chi_1 \chi_2 \frac{N^{\chi_{1,2}}}{N^{\chi_{3,\dots,n}}} + \dots + \chi_1 \chi_2 \dots \chi_n \frac{N^{\chi_{(1,2,\dots,n)}}}{N^{\chi_{(1,2,\dots,n)}}}}{1 + \chi_1 \frac{D^{\chi_1}}{D^{\chi_{1,2,\dots,n}}} + \dots + \chi_n \frac{D^{\chi_n}}{D^{\chi_{1,2,\dots,n-1}}} + \chi_1 \chi_2 \frac{D^{\chi_{1,2}}}{D^{\chi_{2,\dots,n}}} + \dots + \chi_1 \chi_2 \dots \chi_n \frac{D^{\chi_{(1,2,\dots,n)}}}{D^{\chi_{(1,2,\dots,n)}}}}, \quad (3.26)$$

где $S'_0 = \frac{N^{\chi_{1,2,\dots,n}}}{D^{\chi_{1,2,\dots,n}}}$.

Для автоматизации процесса получения выражения ССФ в дробной форме разработан программный продукт Toleralize (авторы – А.М. Кузнецов, А.И. Забродина) [138].

Схемный подход к анализу допусков элементов и определению погрешностей преобразования электрических цепей. Влияние технологического разброса параметров элементов электрической цепи на ее свойства, также как, например, воздействие паразитных эффектов, может быть учтено на схеме замещения путем введения дополнительных элементов [196, 200]. Допуск на пассивные двухполюсники может быть задан сопротивлением с параметром $\delta(R_i)$ (рис. 3.7,а) или источником напряжения, управляемым током (ИНУТ), включенными последовательно исследуемому резистору, либо проводимостью с параметром $\delta(g_i)$ (рис. 3.7,б) или источником тока, управляемым напряжением (ИТУН), подсоединенными параллельно. Аналогичным образом определяются допуски реактивных элементов, представленных эквивалентными сопротивлениями и проводимостями. Допуски активных четырехполюсников, выражающие разброс внешних параметров, могут быть смоделированы с помощью УИ. Так, допуск на коэффициент передачи усилителей напряжения, проводимости, сопротивления и тока задается соответственно ИНУН с параметром $\delta(K_i)$ (рис. 3.7,в), ИТУН с параметром $\delta(G_d)$ (рис. 3.7,г), ИНУТ с параметром $\delta(H_i)$ (рис. 3.7,д) и ИТУТ с параметром $\delta(B_i)$ (рис. 3.7,е).



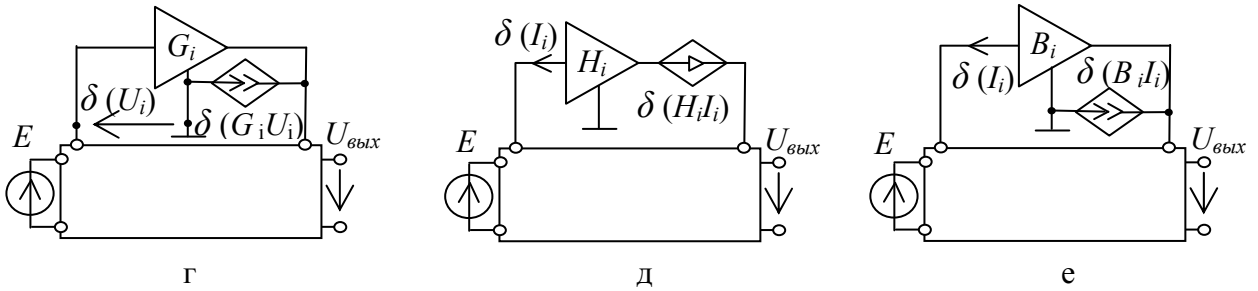


Рис. 3.7. Задание допусков схемными элементами

Применение дробной формулы (3.24) для выделения параметров введенных в электрическую цепь новых схемных элементов позволяет оценить их влияние на номинальный коэффициент передачи. Из выражений (3.20) и (3.24) запишем дробную формулу получения мультипликативной погрешности [144]

$$\gamma = \frac{\delta(\chi)(N^{\delta(\chi)} D_{\delta(\chi)} - N_{\delta(\chi)} D^{\delta(\chi)})}{\delta(\chi) N_{\delta(\chi)} D^{\delta(\chi)} + N_{\delta(\chi)} D_{\delta(\chi)}}, \quad (3.27)$$

из которой выводится выражение для нахождения допуска

$$\delta(\chi) = \frac{\gamma N_{\delta(\chi)} D_{\delta(\chi)}}{N^{\delta(\chi)} D_{\delta(\chi)} - N_{\delta(\chi)} D^{\delta(\chi)} (\gamma + 1)}. \quad (3.28)$$

Из выражения (3.26) можно вывести общую формулу для нахождения погрешности преобразования n элементов [144]:

$$\begin{aligned} \gamma_{(1,2,\dots,n)} = & \left[\delta(\chi_1) \left(N_{\delta(\chi_{2,\dots,n})}^{\delta(\chi_1)} D_{\delta(\chi_{1,2,\dots,n})} - N_{\delta(\chi_{1,2,\dots,n})} D_{\delta(\chi_{2,\dots,n})}^{\delta(\chi_1)} \right) + \dots + \right. \\ & + \delta(\chi_n) \left(N_{\delta(\chi_{1,2,\dots,n-1})}^{\delta(\chi_n)} D_{\delta(\chi_{1,2,\dots,n-1})} - N_{\delta(\chi_{1,2,\dots,n})} D_{\delta(\chi_{1,2,\dots,n-1})}^{\delta(\chi_n)} \right) + \\ & + \delta(\chi_1 \chi_2) \left(N_{\delta(\chi_{3,\dots,n})}^{\delta(\chi_{1,2})} D_{\delta(\chi_{1,2,\dots,n})} - N_{\delta(\chi_{1,2,\dots,n})} D_{\delta(\chi_{3,\dots,n})}^{\delta(\chi_{1,2})} \right) + \dots + \\ & \left. + \delta(\chi_1 \chi_2 \dots \chi_n) \left(N_{\delta(\chi_{(1,2,\dots,n)})}^{\delta(\chi_{(1,2,\dots,n)})} D_{\delta(\chi_{1,2,\dots,n})} - N_{\delta(\chi_{1,2,\dots,n})} D_{\delta(\chi_{(1,2,\dots,n)})}^{\delta(\chi_{(1,2,\dots,n)})} \right) \right] / \\ & / \left[N_{\delta(\chi_{1,2,\dots,n})} \left(\delta(\chi_1) D_{\delta(\chi_{2,\dots,n})}^{\delta(\chi_1)} + \dots + \delta(\chi_n) D_{\delta(\chi_{1,2,\dots,n-1})}^{\delta(\chi_n)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \delta(\chi_1 \chi_2) D_{\delta(\chi_{3,\dots,n})}^{\delta(\chi_{1,2})} + \dots + \delta(\chi_1 \chi_2 \dots \chi_n) D_{\delta(\chi_{(1,2,\dots,n)})}^{\delta(\chi_{(1,2,\dots,n)})} + D_{\delta(\chi_{1,2,\dots,n})} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Функция автоматизированного определения мультипликативной погрешности преобразования электрических цепей и допусков произвольных линейных элементов автоматизации реализована в программе Toleralize (авторы – А.М. Кузнецов, А.И. Забродина) [138].

Схемно-алгебраические формулы определения погрешности. Для большей наглядности анализа влияния погрешности преобразования на номинальный коэффициент передачи удобно представить формулу (3.27) в схемно-алгебраическом виде для каждого типа элементов.

На основе выражения (3.27) и рис. 3.7,а и 3.7,б запишем схемно-алгебраические формулы получения погрешности пассивных двухполюсников при задании допуска сопротивлением и проводимостью соответственно [144]:

$$\gamma_{R_i} = \frac{\delta(R_i) \left[\begin{array}{c} \text{Circuit 1} \\ \text{Circuit 2} \\ \text{Circuit 3} \\ \text{Circuit 4} \end{array} \right]}{\delta(R_i) \left[\begin{array}{c} \text{Circuit 1} \\ \text{Circuit 2} \\ \text{Circuit 3} \\ \text{Circuit 4} \end{array} \right]}} \quad (3.30)$$

$$\gamma_{g_i} = \frac{\delta(g_i) \left[\begin{array}{c} \text{Circuit 1} \\ \text{Circuit 2} \\ \text{Circuit 3} \\ \text{Circuit 4} \end{array} \right]}{\delta(g_i) \left[\begin{array}{c} \text{Circuit 1} \\ \text{Circuit 2} \\ \text{Circuit 3} \\ \text{Circuit 4} \end{array} \right]}} \quad (3.31)$$

Аналогичным образом получим, согласно (3.27) и рис. 3.7,в–е, выражения для нахождения значения погрешности усилителей при задании допуска с помощью УИ [144]:

$$\gamma_{K_i} = \frac{\delta(K_i) \left[\begin{array}{c} \text{Circuit 1} \\ \text{Circuit 2} \\ \text{Circuit 3} \\ \text{Circuit 4} \end{array} \right]}{\delta(K_i) \left[\begin{array}{c} \text{Circuit 1} \\ \text{Circuit 2} \\ \text{Circuit 3} \\ \text{Circuit 4} \end{array} \right]}} \quad (3.32)$$

$$\gamma_{G_i} = \frac{\delta(G_i)}{\delta(G_i)} = \left[\begin{array}{c} \delta(G_i) \\ \delta(G_i) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \delta(G_i) \\ \delta(G_i) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \delta(G_i) \\ \delta(G_i) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \delta(G_i) \\ \delta(G_i) \end{array} \right] \quad (3.33)$$

$$\gamma_{H_i} = \frac{\delta(H_i)}{\delta(H_i)} = \left[\begin{array}{c} \delta(H_i) \\ \delta(H_i) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \delta(H_i) \\ \delta(H_i) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \delta(H_i) \\ \delta(H_i) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \delta(H_i) \\ \delta(H_i) \end{array} \right] \quad (3.34)$$

$$\gamma_{B_i} = \frac{\delta(B_i)}{\delta(B_i)} = \left[\begin{array}{c} \delta(B_i) \\ \delta(B_i) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \delta(B_i) \\ \delta(B_i) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \delta(B_i) \\ \delta(B_i) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \delta(B_i) \\ \delta(B_i) \end{array} \right] \quad (3.35)$$

Схемно-алгебраические формулы определения допуска на параметры. Запишем формулу получения погрешности (3.28) в схемно-алгебраическом виде при задании допуска на элемент сопротивлением (рис. 3.7,а) и проводимостью соответственно (рис. 3.7,б) [144]:

$$\delta(R_i) = \frac{\gamma_{R_i} \left[\text{Circuit with } R_i \text{ and } \gamma_{R_i} \right] \times \left[\text{Circuit with } R_i \right]}{\left[\text{Circuit with } R_i \right] \times \left[\text{Circuit with } R_i \right] - (\gamma_{R_i} + 1) \left[\text{Circuit with } R_i \right] \times \left[\text{Circuit with } R_i \right]} \quad (3.36)$$

$$\delta(g_i) = \frac{\gamma_{g_i} \left[\text{Circuit with } g_i \text{ and } \gamma_{g_i} \right] \times \left[\text{Circuit with } g_i \right]}{\left[\text{Circuit with } g_i \right] \times \left[\text{Circuit with } g_i \right] - (\gamma_{g_i} + 1) \left[\text{Circuit with } g_i \right] \times \left[\text{Circuit with } g_i \right]} \quad (3.37)$$

Аналогичным образом получим, согласно (3.20) и рис. 3.7,в-е, САФ при задании допусков активных элементов с помощью УИ [144]:

$$\delta(K_i) = \frac{\gamma_{K_i} \left[\text{Circuit with } K_i \text{ and } \gamma_{K_i} \right] \times \left[\text{Circuit with } K_i \right]}{\left[\text{Circuit with } K_i \right] \times \left[\text{Circuit with } K_i \right] - (\gamma_{K_i} + 1) \left[\text{Circuit with } K_i \right] \times \left[\text{Circuit with } K_i \right]} \quad (3.38)$$

$$\delta(G_i) = \frac{\gamma_{G_i} \left[\text{Circuit with } G_i \text{ and } \gamma_{G_i} \right] \times \left[\text{Circuit with } G_i \right]}{\left[\text{Circuit with } G_i \right] \times \left[\text{Circuit with } G_i \right] - (\gamma_{G_i} + 1) \left[\text{Circuit with } G_i \right] \times \left[\text{Circuit with } G_i \right]} \quad (3.39)$$

$$\delta(H_i) = \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{Circuit with } H_i \text{ and } \gamma_{Hi} \\ \hline \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{Circuit with } H_i \\ \hline \end{array} \right] \quad (3.40)$$

$$\delta(H_i) = \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{Circuit with } H_i \\ \hline \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{Circuit with } H_i \\ \hline \end{array} \right] - (\gamma_{Hi} + 1) \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{Circuit with } H_i \\ \hline \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{Circuit with } H_i \\ \hline \end{array} \right] + \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{Circuit with } B_i \text{ and } \gamma_{Bi} \\ \hline \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{Circuit with } B_i \\ \hline \end{array} \right] \quad (3.41)$$

Отметим, что значения определителей $N_{\delta(x)}$ и $D_{\delta(x)}$ в полученных формулах (3.27)–(3.28), (3.30)–(3.41) а также $N_{\delta(x_{1,2,\dots,n})}$ и $D_{\delta(x_{1,2,\dots,n})}$ в (3.29) остаются неизменными и находятся при расчете номинального коэффициента передачи. Следовательно, применение предложенных аналитических выражений для параметрического синтеза и оптимизации параметров элементов ЛЭЦ по заданному значению погрешности преобразования, а также для определения значений допусков позволяет уменьшить число необходимых операций расчета.

3.7. Обобщения формул выделения

Анализ механических цепей. В работе [212] рассмотрена возможность применения символично-топологического подхода к анализу механических цепей. Наименее формализованным этапом при моделировании механической системы является переход от нее к механической цепи из сосредоточенных элементов трения, упругости и массы. Необходимо помнить, что элементы масс могут быть включены только параллельно, так как один их полюс присоединен к неподвижной точке (земле). Элементы трения и упругости могут быть соединены на схеме механической цепи произвольным образом.

В соответствии со второй системой электромеханических аналогий [148, 167] устанавливаются следующие пары подобных элементов электрической и механической цепей: источник тока – источник силы,

источник напряжения – источник скорости, приемник тока – приемник силы, приемник напряжения – приемник скорости, сопротивление – податливость, проводимость – сопротивление, емкостная проводимость – операторное сопротивление массы, индуктивное сопротивление – операторная податливость упругости.

Определитель механической схемы вводится по аналогии со схемным определителем электрической цепи [258]. Модификация формул выделения параметров применительно к механическим цепям сводится к формальной замене понятийного аппарата. Таким образом, для выделения параметров сопротивления и податливости используются формулы:

$$\Delta = b\Delta_b + \Delta^b, \quad (3.42)$$

$$\Delta = \beta\Delta^\beta + \Delta_\beta, \quad (3.43)$$

где Δ – определитель механической схемы, b и β – сопротивление и податливость выделяемого элемента трения. Нижний (верхний) индекс при символе Δ указывает на стягивание (удаление) соответствующего элемента в механической схеме. При формировании схемных функций в операторной форме выражения (3.42) используются для выделения параметров элементов массы и упругости соответственно.

Схемная функция механической цепи представляется в виде аналогичном формуле (1.6), где ΔN и ΔD – определители схем числителя и знаменателя, раскрываемые по формулам (1.1). Схема знаменателя получается из исходной схемы в соответствии со свойствами идеальных источников и приемников силы или скорости.

Для нахождения числителя передаточных схемных функций используется нулор, генератор (приемник) которого сочетает в себе одновременно свойства генераторов силы и скорости (приемников силы и скорости) при замыкании и размыкании полюсов, как показано в табл. 3.12

Табл. 3.12. Свойства элементов схемы при замыкании и размыкании

Элемент схемы	Замыкание	Размыкание
Генератор силы	Нейтрализация	Вырождение
Генератор скорости	Вырождение	Нейтрализация
Приемник силы	Вырождение	Нейтрализация
Приемник скорости	Нейтрализация	Вырождение
Генератор нуллора	Вырождение	Вырождение
Приемник нуллора	Вырождение	Вырождение

Предложенная методика анализа механических цепей поступательного движения в отличие от применявшихся ранее топологических методик не требует трудоемкого перечисления путей и контуров передачи, а также использования вспомогательных математических аппаратов графов и матриц. Это оказывается ценным как при изучении теории механических цепей, так и при выполнении инженерных расчетов. По аналогии методика может быть обобщена для

анализа гидравлических, пневматических, тепловых и т.д. цепей, что позволит использовать ее в составе систем автоматизированного проектирования объектов, включающих в себя компоненты различной физической природы [97, 98].

Анализ схем на элементах с распределенными параметрами. К числу типов элементов, подлежащих символьному анализу, добавились резистивно-емкостные элементы с распределенными параметрами [206]. Предлагаемый метод позволяет получить схемную функцию цепи с распределенными RC -элементами как в виде отношения единичных символьных выражений числителя и знаменателя, так и в виде последовательного выражения – иерархической последовательности подвыражений. Метод основан на преобразовании исходных схемно-алгебраических выражений определителей схем числителя и знаменателя в алгебраические выражения. Схема числителя формируется из исходной схемы с помощью нуллора. Схема знаменателя формируется также из исходной схемы путем нейтрализации источника воздействия и приемника тока или напряжения. Преобразование схемно-алгебраических выражений определителей схем числителя и знаменателя к алгебраическому выражению осуществляется по формулам выделения элементов.

Формула выделения элемента является САФ для определителя произвольной схемы, содержащей рассматриваемый многополюсник. САФ представляет собой сумму произведений определителей нуллорных схем и их коэффициентов. Коэффициенты нуллорных схем – это алгебраические выражения, содержащие параметры рассматриваемого многополюсника. САФ для распределенных RC -элементов могут быть получены с использованием САФ однородной длинной (передающей) линии [185] и схем замещения RC -элементов путем выделения всех двухполюсников и УИ по формулам (1.1), (1.2) и (3.7).

$$\left| \begin{array}{c} 1 \text{---} \text{---} 2 \\ Z_B, \gamma, l \\ 1' \text{---} \text{---} 2' \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 1 \text{---} \square \text{---} 2 \\ \circ \text{---} \text{---} \circ \\ 1', 2' \end{array} \right| = \text{sh}(\gamma l) \left[Z_B^2 \left| \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \\ \circ \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \\ \circ \end{array} \right| \right] + \\ + Z_B \left\{ \left| \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \\ \circ \end{array} \right| + [\text{ch}(\gamma l) - 1] \left[\left| \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \\ \circ \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \\ \circ \end{array} \right| \right] \right\}, \quad (3.44)$$

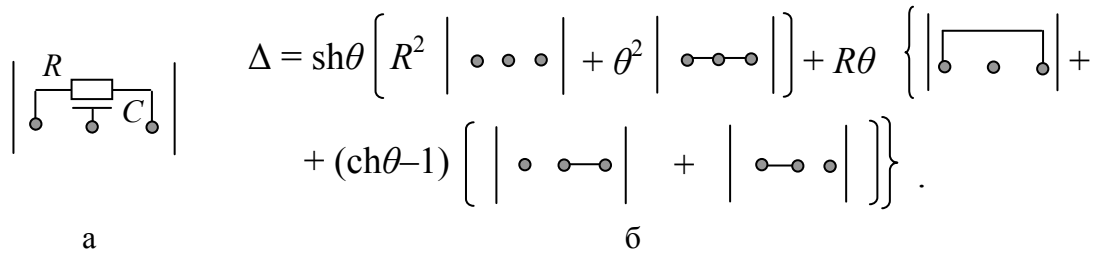
где Z_B – волновое сопротивление линии; γ – постоянная распространения; l – длина отрезка линии.

Приведем пример получения САФ для трехполюсного RC -элемента на базе $R-C-0$ -структуры (рис. 3.8). Элемент имеет прямоугольную форму и содержит резистивный (обозначен символом R), диэлектрический (C) и проводящий (0) слои. САФ такого элемента может быть получена как частный случай формулы (3.44) с учетом параметров

$$\gamma l = \sqrt{pCR} = \theta \quad \text{и} \quad Z_B = \sqrt{\frac{R}{pC}} = \frac{R}{\theta}, \quad (3.45)$$

где p – оператор Лапласа или комплексная частота; R , C – полное сопротивление и емкость RC -элемента; θ – постоянная передачи.

После подстановки формул (3.45) в правую часть (3.44) и умножения последней на квадрат постоянной передачи $\theta = \sqrt{pCR}$ получится искомая САФ, представленная в табл. 3.12. Умножение САФ (3.44) на постоянный коэффициент не влияет на входную (передаточную) функцию и на характеристическое уравнение цепи [185].



$$\Delta = \text{sh}\theta \left[R^2 \left| \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right| + \theta^2 \left| \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right| \right] + R\theta \left\{ \left| \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right| + \right. \\ \left. + (\text{ch}\theta - 1) \left[\left| \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right| \right] \right\}.$$

а б

Рис. 3.8. Схема замещения RC -элемента на базе $R-C-0$ -структуры (а) и его САФ (б)

Схемно-алгебраические формулы выделения распределенных RC -элементов, не содержат избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых. Формулы позволяют без трудоемкого поиска контуров передачи сигнала получить компактные ССФ, рациональные относительно заданных переменных. Использование формул в программе для символьного анализа цепей с сосредоточенными элементами *CIRSYM* обобщает ее на цепи с распределенными RC -элементами. Разработанный метод в отличие от символьного метода контуров передачи не требует трудоемкого комбинаторного поиска топологических структур, что обеспечивает автоматизированное формирование схемных функций сложных распределенных RC -цепей.

Анализ цепей с переключаемыми конденсаторами. Схемный подход был распространен на анализ параметрических цепей – цепей с переключаемыми конденсаторами [178, 179, 193, 209]. Значительный вклад в развитие МСО в этом направлении сделал Александр Станиславович Коротков, профессор, д.т.н., заместитель декана факультета «Радиофизика и электроника» Санкт-Петербургского Государственного Политехнического Университета по международным вопросам.

Для символьного анализа схем с переключаемыми конденсаторами в частотной области используются матричный узловой метод [223], топологические методы на основе сигнального, ориентированного беспетлевого графа и графа Натана. Однако эти методы требуют, во-первых, трудоемкого комбинаторного поиска различных топологических структур – путей и контуров, а, во-вторых, дают излишние взаимно уничтожающиеся слагаемые для схем с активными элементами общего вида, у которых управляемая или управляющая ветвь не соединена с общим полюсом схемы. Для анализа схем с переключаемыми конденсаторами в [178, 179] был предложен обобщенный метод выделения

параметров, который полностью исключает комбинаторный поиск путей (контуров) и не дает взаимно уничтожающихся слагаемых. В дальнейшем этот метод получил развитие в статье [193] на основе схемно-алгебраических формул выделения параметров многополюсников [185].

Построение символьных выражений передаточных функций дискретно-аналоговых схем с переключаемыми конденсаторами осуществляется так же, как для аналоговых цепей, по схемно-алгебраическим формулам, которые в то же время отличаются от САФ аналоговых схем, поскольку схемы замещения цепей с переключаемыми конденсаторами имеют входы и выходы, разделенные по фазам. Для трехполюсной цепи с двухфазным управлением цепи возможны четыре типа комплексных передаточных функций по напряжению, которые отличаются фазами входного и выходного напряжений.

В комплексных схемах замещения цепей с переключаемыми конденсаторами имеются дублирующие элементы – несколько элементов (по числу фаз управления) с одним и тем же параметром. Дублируется также емкость C переключаемого конденсатора – она встречается многократно (в двухфазных схемах – до шести раз) в параметрах элементов. Для исключения таких дубликаций и обеспечения тем самым компактной свертки символьных выражений целесообразно использовать метод выделения многополюсников [185], который позволяет применять группированные схемно-алгебраические формулы. Такие САФ для дискретно-аналоговых многополюсников получаются аналогично САФ аналоговых схем путем выделения двухполюсных элементов, ключей и УИ по формулам (1.1), (1.2) и (3.7).

Для примера приведем САФ для заземленного конденсатора в комплексной области с двумя противофазными ключами (рис. 3.9)

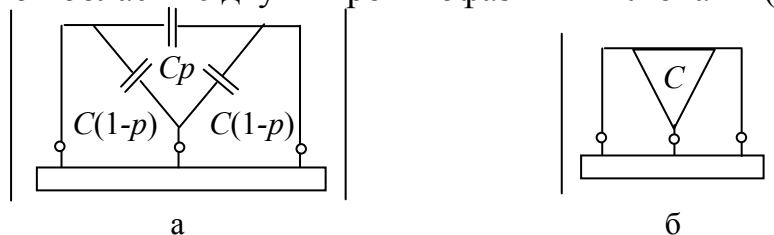


Рис.3.9. Комплексная схема замещения (оператор $p=z^{-1/2}$) (а) и условное обозначение (б) заземленного конденсатора с двумя противофазными ключами

$$\begin{aligned}
 D &= C \left[C(1-z^{-1}) \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| + (1-z^{-1/2}) \left[\left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| \right] + z^{-1/2} \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| \right] + \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| \\
 D &= C \left[-Cz^{-1} \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| + z^{-1/2} \left[\left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| \right] + \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| \right. \\
 &\quad \left. + \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| + C \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| \right] + \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| . \tag{3.46}
 \end{aligned}$$

Метод выделения параметров является наиболее эффективным средством символьного анализа цепей с переключаемыми конденсаторами,

поскольку не создает избыточных слагаемых, позволяет получить выражения, более компактные и экономичные по числу вычислительных операций, чем матричные методы, и не требует трудоемких комбинаторных операций поиска контуров или путей по сравнению с графовыми методами, а также обобщающим их методом графа Натана. Метод выделения многополюсников исключает многократную (до шести раз в двухфазных цепях) избыточность комплексных схем замещения цепей с ПК за счет использования готовых сгруппированных САФ выделения базовых элементов схем с ПК, что позволяет получить более компактные выражения и с меньшими временными затратами.

МСО является наиболее совершенным из методов анализа ЛЭЦ, основанных на схемном подходе В. Фойснера. Введение понятия НУИ, обобщающего понятие нуллора, позволило распространить схемный подход на анализ схем с УИ. Использование формул выделения параметров, таких как стягивания и удаления ветвей (1.1)–(1.2) и выделение параметра УИ и нуллоров (3.7)–(3.9), предназначенных для анализа схем со всеми типами УИ и идеальными ОУ, обеспечивает разложение схемных определителей без дубликаций, не требуя перечисления цепей контуров передачи.

Представления ССФ в виде САФ (рис. 3.2), обеспечивает предельную наглядность процессу анализа ЛЭЦ. Обобщение формул выделения позволило применить схемно-алгебраический подход к анализу механических цепей, электрических цепей с резистивно-емкостными элементами с распределенными параметрами, параметрических цепей – цепей с переключаемыми конденсаторами. МСО позволяет формировать полиномиальные коэффициенты схемных функций в компактной форме, не требуя развертывания и сортировки символьных выражений. Возможность представления схемных функций в дробной форме позволяет применять схемный подход для допускового анализа электрических цепей.

Стоит отметить, что хотя МСО и соединил в себе лучшие достижения разработанных ранее методов символьно-топологического анализа Брауна, Чанга и Виржбы, Сикета и Партена, Хашемяна, результаты советских и российских ученых были получены независимо от работ западных исследователей, в ходе прямого развития схемного подхода В. Фойснера.

МСО является универсальным методом анализа линейных электрических цепей, что подтверждается возможностью доказательства и совершенствования альтернативных методов символьного анализа. Например, использование представления ССФ в виде САФ позволило дополнить популярную среди специалистов США методику Миддлбука новыми формулами выделения.

Глава 4. Приложения метода схемных определителей

4.1. Схемно-алгебраические доказательства топологических преобразований электрических цепей

МСО как эффективный инструмент для доказательства топологических преобразований электрических цепей. Задача анализа является конечным этапом оптимального синтеза электрических цепей при использовании схемно-топологических преобразований, выполняемых на уровне структурных схем или схем замещения. Топологические преобразования используются для генерации (размножения) и синтеза новых конфигураций схем электрических цепей с целью определения и выбора оптимальной. Топологические преобразования, инвариантные относительно параметров или части параметров исходной (порождающей) схемы, являются эффективным средством расширения классов эквивалентных электрических цепей, установления взаимосвязей (топологических и аналитических) между схемами и синтеза новых схем.

В работах [95, 110, 111, 113, 116–118, 283, 284] предложены доказательства топологических преобразований, основанные только на теории схемных определителей. Для обоснования топологических преобразований, выбранных в качестве объекта исследований, специалисты обычно используют широкий набор разнообразных инструментов: теорема Теллегена, матричные и графовые методы, теория обратной связи. Доказательство некоторых преобразований приводится в литературе в самом общем или даже в частичном (P -преобразование) виде. Применение схемного подхода позволило избежать необходимости использования графовых и матричных представлений и сделать процесс обоснования единым, и формальным.

Таким образом, метод схемных определителей является эффективным инструментом для доказательства известных и разработки новых топологических преобразований. При этом справедливость того или иного преобразования устанавливается уже на схемном уровне, то есть до перехода к символьным выражениям схемных определителей.

Большим достоинством предложенных в [95, 110, 111, 113, 116–118, 283, 284] процедур топологических преобразований является их простота и наглядность, что подтверждает эффективность мышления схемными образами при развитии топологической теории электрических цепей. Предложенные доказательства преобразований расширили область их корректного применения для синтеза активных электрических цепей.

Доказанные в работах [95, 110, 111, 113, 116–118, 283, 284] топологические преобразования используются (или могут быть использованы) для решения следующих прикладных задач: 1) получение патентоспособных схемных решений при наличии запатентованного

прототипа [25]; 2) повышение качества радиоэлектронных средств; 3) понижение чувствительности к вариации параметров схемных элементов (в частности, R -преобразование); 4) доказательство полноты заданного класса схем ЭЦ с целью выбора (обоснования) оптимального схемного варианта; 5) топологический синтез новых схем, обладающих заданными свойствами или более высокими параметрами; 6) размыкание активных электрических цепей с обратной связью (преобразование цепей с обратной связью в эквивалентные цепи без обратной связи); 7) изменение средств достижения заданного качества; 8) изменение типа обратной связи путем P -преобразований схем с отрицательной обратной связью на положительную обратную связь и обратно; 9) изменение типа активной элементной базы без изменения функций цепи; 10) изменение типа электрической цепи путем топологических преобразований потенциальных, токовых, импедансных и адмитансных цепей в токовые, потенциальные, адмитансные и импедансные цепи и обратно; 11) устранение вычислительной избыточности при анализе схем электрических цепей; 12) уменьшение влияния собственных шумов активных схем путем топологического преобразования переносом нагрузки; 13) выбор оптимального варианта топологии при проектировании гибридно-пленочных микросхем и др.

Развитие схемного подхода к структурному синтезу позволило открыть новые эквивалентные топологические преобразования электрических цепей, не изменяющие количество элементов схемы [132]. Данный вид преобразований, получивший название преобразование переключением активных элементов, является эффективным способом получения новых схем с тождественными символьными определителями и символьными схемными функциями.

В качестве примера рассмотрим доказательство с помощью МСО реверсивного преобразования, ранее обоснованного Л.И. Волгиным (рис. 4.1) с использованием теории обратной связи, представленное в [118].

Обоснование реверсивного преобразования с помощью МСО. Принцип обратимости предполагает сохранение передаточной функции при изменении направления передачи сигнала (взаимная замена – реверс входа и выхода схемы). Обобщенный принцип обратимости или принцип взаимной обратимости справедлив для активных электрических цепей и предусматривает наряду с реверсом входа и выхода схемы взаимную замену входов и выходов управляемых источников. Реверсивное топологическое преобразование, в основе которого лежит принцип взаимной обратимости, служит для получения новых схем, эквивалентных и дуальных порождающим схемам по схемным функциям, что используется в процедурах топологического синтеза широкого класса электронных средств.

В работе [118] схемно-алгебраический критерий обратимости для многополюсников: два многополюсника являются обратимыми относительно некоторых n входов-портов (n – четное число), если определитель схемы, образованной из первого многополюсника подключением к портам $n/2$ нораторов и $n/2$ нуллаторов, равен определителю схемы, образованной в результате замены на тех же портах нораторов – нуллаторами, и наоборот.

Опираясь на данное положение, рассмотрим реверсивное топологическое преобразование в общем случае, когда электрическая цепь содержит УИ.

Рассмотрим схему на рис. 4.1.

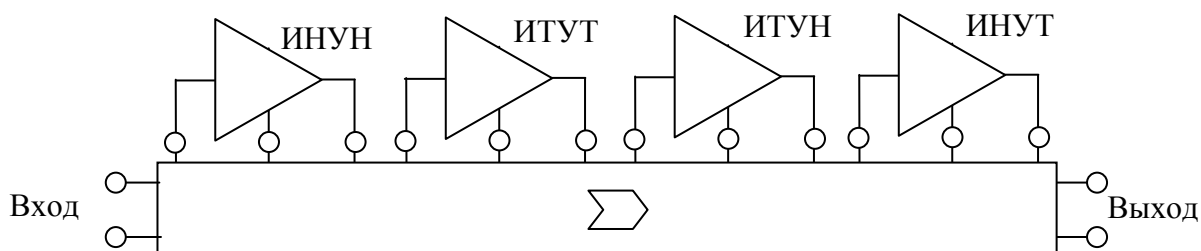


Рис. 4.1. Схема 1

Эта схема содержит все четыре типа УИ: 1) ИНУН, или усилитель напряжения; 2) ИТУТ, или усилитель тока; 3) ИТУН, или усилитель проводимости; 4) ИНУТ, или усилитель сопротивления.

Считаем, что усилители напряжения, тока, проводимости и сопротивления могут быть инвертирующими, а также иметь дифференциальные входы и выходы. Внешняя подсхема должна быть взаимной относительно входного и выходного порта схемы, а также относительно входных и выходных полюсов активных элементов.

В работе [118] утверждается, что: 1) коэффициент передачи по напряжению схемы на рис. 4.1 имеет такое же символьное выражение, как и коэффициент передачи тока для схемы на рис. 4.2, или, наоборот, коэффициент передачи тока схемы на рис. 4.1 имеет такое же символьное выражение, как и коэффициент передачи напряжения для схемы на рис. 4.2; 2) передаточная проводимость и передаточное сопротивление схем на рис. 4.1 и 4.2 совпадают.

Как видно, при переходе от схемы на рис. 4.1 к схеме рис. 4.2 у усилителей проводимости и сопротивления изменяется ориентация (меняются местами входы и выходы). Усилители напряжения и тока, кроме изменения ориентации, претерпевают изменение типа на дуальный, то есть ИНУН заменяется на ИТУТ, а ИТУТ – на ИНУН. Замена ИНУН на ИТУТ и ИТУТ на ИНУН в реверсивном преобразовании выполняется при условии $k = \beta$.

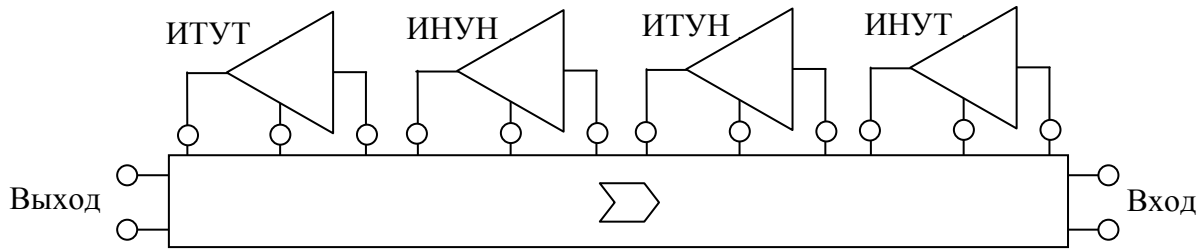


Рис. 4.2. Схема 2

Определители схем числителей передаточных функций, формируемых для схем на рис. 4.1 и 4.2 представлены на рис. 4.3 и 4.4 соответственно, где активные трехполюсники замещены управляемыми источниками.

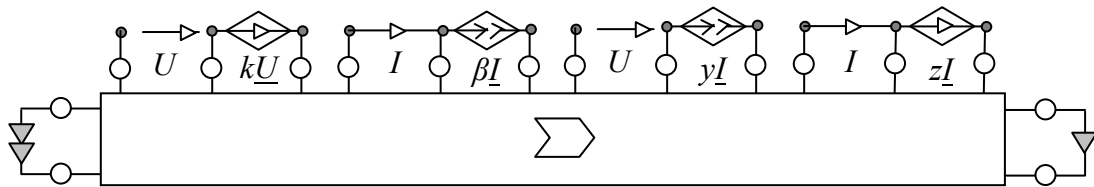


Рис. 4.3. Числитель передаточной функции схемы по рис. 4.1

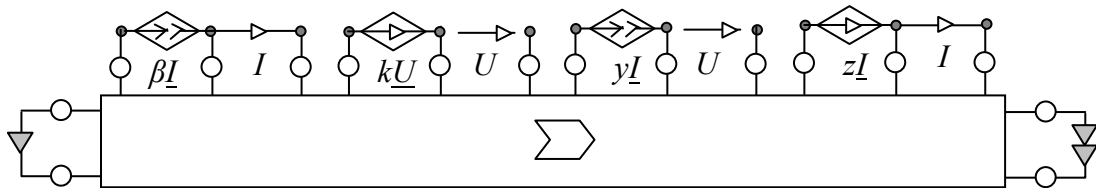


Рис. 4.4. Числитель передаточной функции схемы по рис. 4.2

Докажем справедливость реверсивного преобразования в общем случае, используя формулу выделения параметров УИ (3.7). Представим определитель Δ_1 схемы на рис. 4.3 разложением по параметрам k , β , y и z :

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 = & \Delta(k, \beta, y, z \rightarrow \text{нуллок}) + \Delta(k, \beta, y \rightarrow \text{нуллок}, z=0) + \Delta(k, \beta, z \rightarrow \text{нуллок}, y=0) + \\
 & + \Delta(k, y, z \rightarrow \text{нуллок}, \beta=0) + \Delta(\beta, y, z \rightarrow \text{нуллок}, k=0) + \Delta(k, \beta \rightarrow \text{нуллок}, y=z=0) + \\
 & + \Delta(k, y \rightarrow \text{нуллок}, z=\beta=0) + \Delta(k, z \rightarrow \text{нуллок}, y=\beta=0) + \Delta(\beta, y \rightarrow \text{нуллок}, z=k=0) + \\
 & + \Delta(\beta, z \rightarrow \text{нуллок}, y=k=0) + \Delta(y, z \rightarrow \text{нуллок}, k=\beta=0) + \Delta(k \rightarrow \text{нуллок}, y=z=\beta=0) + \\
 & + \Delta(\beta \rightarrow \text{нуллок}, y=z=k=0) + \Delta(y \rightarrow \text{нуллок}, k=\beta=z=0) + \\
 & + \Delta(z \rightarrow \text{нуллок}, k=\beta=y=0) + \Delta(k=\beta=y=z=0).
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Определитель Δ_2 схемы на рис. 4.4, полученный аналогично, приводится ниже

$$\begin{aligned}
 \Delta_2 = & \Delta_2(k, \beta, y, z \rightarrow \text{нуллок}) + \Delta_2(k, \beta, y \rightarrow \text{нуллок}, z=0) + \Delta_2(k, \beta, z \rightarrow \text{нуллок}, y=0) + \\
 & + \Delta_2(k, y, z \rightarrow \text{нуллок}, \beta=0) + \Delta_2(\beta, y, z \rightarrow \text{нуллок}, k=0) + \Delta_2(k, \beta \rightarrow \text{нуллок}, y=z=0) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \Delta_2(k, y \rightarrow \text{нуллор}, z = \beta = 0) + \Delta_2(k, z \rightarrow \text{нуллор}, y = \beta = 0) + \Delta_2(\beta, y \rightarrow \\
 &\text{нуллор}, z = k = 0) + \\
 &+ \Delta_2(\beta, z \rightarrow \text{нуллор}, y = k = 0) + \Delta_2(y, z \rightarrow \text{нуллор}, k = \beta = 0) + \Delta_2(k \rightarrow \text{нуллор}, y = z = \beta = 0) + \\
 &+ \Delta_2(\beta \rightarrow \text{нуллор}, y = z = k = 0) + \Delta_2(y \rightarrow \text{нуллор}, k = \beta = z = 0) + \\
 &+ \Delta_2(z \rightarrow \text{нуллор}, k = \beta = y = 0) + \Delta_2(k = \beta = y = z = 0). \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим два предельных случая: 1) преобразование всех УИ в нуллары; 2) нейтрализация всех УИ, которые соответствуют первым и последним слагаемым формул (4.1) и (4.2). Схемы, образованные из схем на рис. 4.3 и 4.4, для первого случая представлены на рис. 4.5 и 4.6.

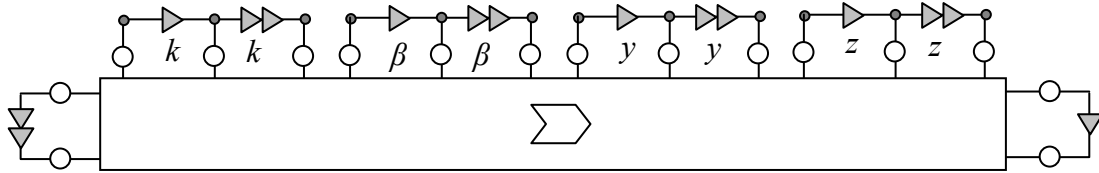


Рис. 4.5. Числитель схемы по рис. 4.3 в первом предельном случае

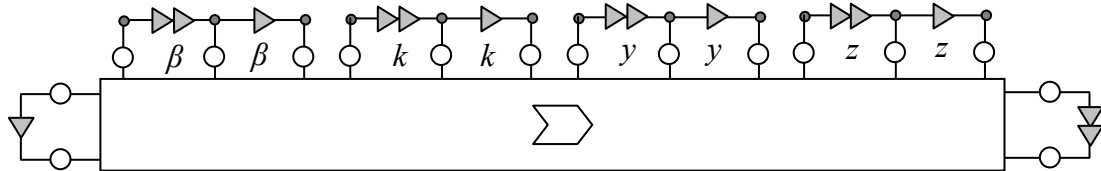


Рис. 4.6. Числитель схемы по рис. 4.4 в первом предельном случае

Принимая во внимание ориентацию внешней подсхемы на рис. 4.5 и 4.6, предложенный в [118] критерий обратимости, а также условие $k = \beta$, убеждаемся в тождественности определителей

$$\Delta_1(k, \beta, y, z \rightarrow \text{нуллор}) = \Delta_2(k, \beta, y, z \rightarrow \text{нуллор}). \tag{4.3}$$

Схемы, образованные из схем на рис. 4.3 и 4.4, для второго предельного случая представлены на рис. 4.7 и 4.8.

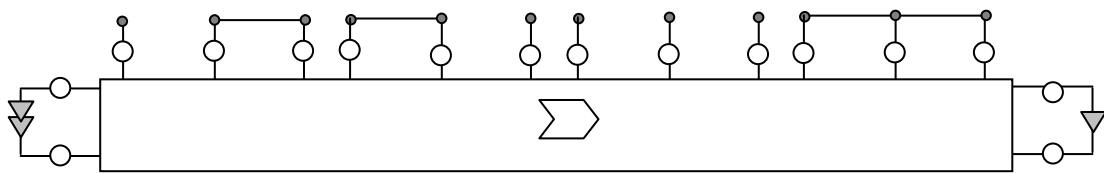


Рис. 4.9. Числитель схемы по рис. 4.3 во втором предельном случае

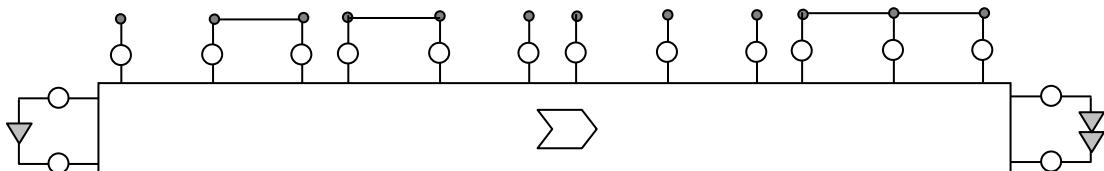


Рис. 4.8. Числитель схемы по рис. 4.4 во втором предельном случае

Обратим внимание на то, что верхние полюса на схеме рис. 4.7 замкнуты и разомкнуты точно так же, как верхние полюса схемы рис. 4.8. Отсюда с учетом классической формулировки принципа взаимности (для 2·2-полюсника) вытекает тождественность определителей

$$\Delta_1(k=\beta=y=z=0) = \Delta_2(k=\beta=y=z=0). \quad (4.4)$$

Аналогично доказывается попарная тождественность оставшихся слагаемых в выражениях (4.1) и (4.2). Следовательно, $\Delta_1 = \Delta_2$.

Определители схем знаменателей, соответствующие передаточным функциям для схем на рис. 4.3 и 4.4, оказываются тождественными вследствие $\Delta_1 = \Delta_2$ и взаимно дополняющих или тождественных режимов на входах и выходах схем. Действительно, короткому замыканию входа первой схемы соответствует холостой ход выхода второй подсхемы (в случае передаточной функции по току для первой схемы и передаточной функции по напряжению второй схемы или, наоборот, передаточной функции по напряжению для первой схемы и передаточной функции по току второй схемы). Короткому замыканию входа и выхода первой схемы соответствует короткое замыкание входа и выхода второй схемы (в случае передаточной проводимости). Размыканию (холостому ходу) входа и выхода первой схемы соответствует размыкание входа и выхода второй схемы (в случае передаточного сопротивления).

Таким образом, реверсивное топологическое преобразование инвариантно как к схемным функциям (отношениям схемных определителей), так и к определителям схем, получаемым в результате этого преобразования. В частности, числитель и знаменатель любой схемной функции инвариантен к реверсированию входа-выхода схемы и активных трех- и четырехполюсников, которые в ней содержатся.

4.2. Неявный принцип наложения

В соответствии с классической формулировкой принципа наложения общая реакция схемы на приемнике напряжения или тока находится путем вычисления реакций каждого отдельно взятого источника и последующего алгебраического суммирования этих реакций. При этом источники, не участвующие в порождении некоторого отклика, исключаются из схемы в соответствии с их физическими свойствами, то есть источники напряжения стягиваются, а источники тока удаляются.

В отличие от традиционного (явного) принципа наложения неявный принцип наложения заключается в замене всех независимых источников на компенсирующие элементы – источники, которые управляются ветвью единственного опорного источника [195, 196]. При этом в результате объединения соответствующим образом подключенных источников образуется многомерный управляемый источник [43, 134, 218].

Многомерные УИ используются как вспомогательные схемные элементы при символьном анализе электрических цепей с несколькими независимыми источниками по неявному методу наложения и в качестве базовых узлов практической схемотехники. Также возможны случаи, когда несколько однотипных приемников от различных управляемых источников оказываются соединены таким образом, что их можно объединить в один, что приводит к образованию многомерного генератора, управляемого одним приемником [134]. В схемотехнике имеется аналог многомерного УИ с многомерным приемником – это обычный сумматор напряжений или токов.

Проиллюстрируем образование многомерного УИ при использовании неявного метода наложения. Без потери общности будем рассматривать схему, содержащую источник эдс E , источник тока J и приемник с искомым током I , которая показана на рис. 4.9,а. От этой схемы, используя формальную замену I/I для множителя 1 при E и J нетрудно перейти к эквивалентной схеме на рис. 4.9,б.

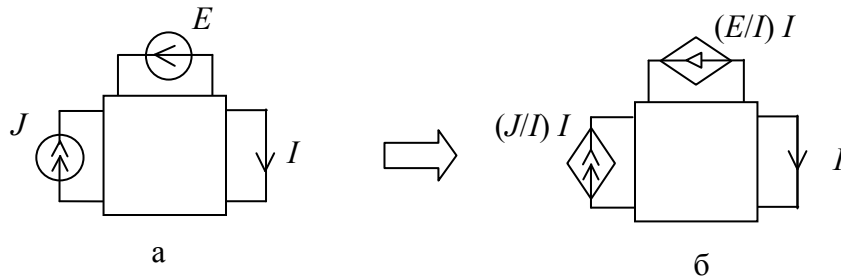


Рис. 4.9. Эквивалентная замена независимых источников на источники, управляемые током

Схема на рис. 4.9,б не содержит независимых источников, следовательно, ее определитель при токе I , отличном от нуля, должен быть тождественно равен нулю, то есть схема на рис. 4.9,б является вырожденной. Применяя формулу выделения параметров УИ (3.7) к схеме на рис. 4.9, а, получаем схемно-алгебраическое выражение

$$\left| \begin{array}{c} (E/I)I \\ (J/I)I \\ I \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \\ J \\ I \end{array} \right| + (E/I) \left| \begin{array}{c} \\ \\ I \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right|$$

которое с учетом вырожденности схемы на рис. 4.9,б приводит к выражению для искомого отклика

$$I = \left(\left| \begin{array}{c} \\ J \\ I \end{array} \right| + E \left| \begin{array}{c} \\ \\ I \end{array} \right| \right) / \left| \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right|. \quad (4.5)$$

Если ввести запрет на нейтрализацию приемника с искомым током, то схемно-алгебраическое выражение (4.5) записывается более компактно

$$I \left| \begin{array}{c} \text{Circuit with } J, E, I \text{ sources} \end{array} \right| I \quad / \quad \left| \text{Equivalent circuit} \right|, \quad (4.6)$$

где символ I , который помечает схемный определитель, указывает на вырождение всех схем, образованных при его раскрытии и не содержащих приемника с током I . Это означает, что слагаемые числителя могут содержать в качестве сомножителей либо J , либо E , но не произведение EJ , поскольку последовательное включение двух нуллаторов приводит к вырождению схемы.

Аналогично находится САВ для отклика напряжения в схеме на рис. 4.10,а.

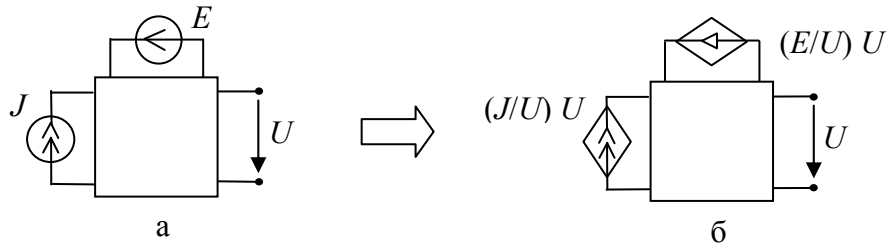


Рис. 4.10. Эквивалентная замена независимых источников на источники, управляемые напряжением

Опуская промежуточные выкладки, получаем

$$U = - \left| \begin{array}{c} \text{Circuit with } J, E, U \text{ sources} \end{array} \right| U \quad / \quad \left| \text{Equivalent circuit} \right|, \quad (4.7)$$

где символ U , который помечает схемный определитель, указывает на вырождение всех схем, образованных при его раскрытии и не содержащих приемника с напряжением U . Это означает, что слагаемые числителя могут содержать в качестве сомножителей либо J , либо E , но не произведение EJ , поскольку параллельное включение двух нуллаторов приводит к вырождению схемы.

Для выделения параметров многомерного УИ рекурсивно используется следующая формула [134]:

$$\Delta = p_i \Delta_1 + \Delta_2 \quad (4.8)$$

где p_i – параметр i -го генератора многомерного УИ, принадлежащий множеству $\chi_i \in \{K, G, H, B\}$; Δ_1 – определитель схемы, в которой

выделяемый i -й генератор многомерного УИ заменяется на норатор, приемник многомерного УИ заменяется на нуллятор, а остальные генераторы $1, 2, \dots, i-1, \dots, i+1, \dots, n$, нейтрализуются; Δ_2 – определитель второй производной схемы, которая образована в результате нейтрализации выделяемого генератора ($\Delta_2=0$, если были выделены или нейтрализованы все генераторы, соответствующие параметрам многомерного УИ).

Для выделения параметра многомерного УИ, управляемого многомерным приемником, рекурсивно используется формула, двойственная выражению (4.8) [134]

$$\Delta = p\Delta_1 + \Delta_2 \quad (4.9)$$

где p – параметр генератора многомерного УИ, принадлежащий множеству $\chi_i \in \{K, G, H, B\}$; Δ_1 – определитель схемы, в которой генератор заменяется на норатор, i -й приемник многомерного УИ заменяется на нуллятор, а остальные приемники $1, 2, \dots, i-1, \dots, i+1, \dots, n$, нейтрализуются; Δ_2 – определитель второй производной схемы, которая образована в результате нейтрализации выделяемого приемника ($\Delta_2=0$, если были выделены или нейтрализованы все приемники многомерного УИ).

4.3. Методы схемной диакоптики

Анализ сложных электрических цепей на основе МСО невозможен без деления их на части. Известны два подхода к иерархическому анализу электрических цепей по частям [82]. Первый подход, так называемый восходящий анализ, основан на операции объединения подсхем, а второй, нисходящий анализ, – на операции бисекции. Восходящий анализ является наиболее эффективным средством исследования сложных цепей, поскольку позволяет получить компактные формулы в виде последовательности подвыражений и требует рассмотрения минимального числа подсхем по сравнению с нисходящим анализом. В последнем случае приходится делить не только исходную схему, но и все подсхемы, входящие в диакоптические формулы. Это деление осуществляется последовательно до получения подсхем в 3...5 узлов, для которых выражения целесообразно формировать без использования диакоптики. В диакоптических формулах, как правило, содержатся многочисленные дубликации и, как следствие, взаимно уничтожающиеся слагаемые, которые так же, как операции деления, снижают точность расчетов [211].

Иерархический анализ электрических цепей путем объединения подсхем является наиболее эффективным средством символического исследования сложных цепей, поскольку позволяет получить компактные формулы в виде последовательных выражений и требует рассмотрения значительно меньшего числа подсхем по сравнению с методом

рекурсивной бисекции. Среди методов иерархического объединения следует отметить методы схемных миноров [199, 278] и D -деревьев (правильных деревьев – *proper trees*) и нулловых схем [15, 62, 150].

Топологический метод схемной бисекции. Предложенные Фойснером формулы являются частными случаями многоузловой бисекции. Проведение i -бисекции оказывается возможным, когда схема i -разделимая, то есть удаление по меньшей мере i узлов с инцидентными ветвями делает ее несвязной. При этом предполагается, что между подсхемами отсутствуют управляющие связи. Получение параметров подсхемы, являющихся сомножителями формул бисекции, в случае $i > 2$ через схемные определители позволило бы дать схемное решение задаче формирования ССФ, избежав применения матриц, графов или теоретико-множественных объектов, служащих промежуточными математическими моделями и традиционно используемых для анализа схем по частям.

Удаление строк и столбцов в матрице наглядно отображается подсоединением нораторов и нуллаторов к соответствующим узлам схемы. Это позволяет выполнить бисекцию на схемном уровне и свести раскрытие миноров определителей матриц к разложению определителей нораторно-нуллаторных схем [15]. Операция удаления строки и столбца в матрице эквивалентна операции подсоединения нуллора на схеме. Отсюда по аналогии с минором матрицы можно ввести понятие «минор схемы».

Миноры подсхемы удобно отображать двоичными векторами (ДВ) размерности $2n$, где n – число внешних узлов подсхемы, не считая базисного узла. Единицы в первой (второй) половине элементов ДВ соответствуют конечным узлам подключения нораторов (нуллаторов). Если к внешнему узлу подсхемы не подсоединяются нуллары, то в соответствующие позиции ДВ заносятся нули. Положение элементов в каждой из половин ДВ задается упорядоченным множеством – кортежем внешних узлов подсхемы, исключая базисный узел, который является начальным узлом всех без исключения нораторов и нуллаторов.

Минор подсхемы, заданный некоторым ДВ, равен определителю схемы, которая получена из этой подсхемы в результате подсоединения нуллора согласно ее ДВ. Для обозначения миноров схемы или подсхемы может применяться символика, принятая для обозначения миноров матрицы. Все шесть миноров подсхемы с тремя внешними узлами изображены на рис. 4.11.

Определитель суммы матриц α и β порядка m двух схем, подлежащих бисекции, находится по формуле

$$\Delta = \sum_{k=0}^m \sum M_k^\alpha A_k^\beta, \quad (4.10)$$

где M_k^α – минор k -го порядка определителя матрицы α ; A_k^β – алгебраическое дополнение (АД) соответствующего минора k -го порядка

определителя матрицы β . В этой формуле $\sum M_k^\alpha A_k^\beta$ – сумма произведений всех возможных миноров и АД соответствующих миноров k -го порядка. Знак A_k^β положителен (отрицателен) при четной (нечетной) сумме номеров строк и столбцов, удаленных для образования этого АД.

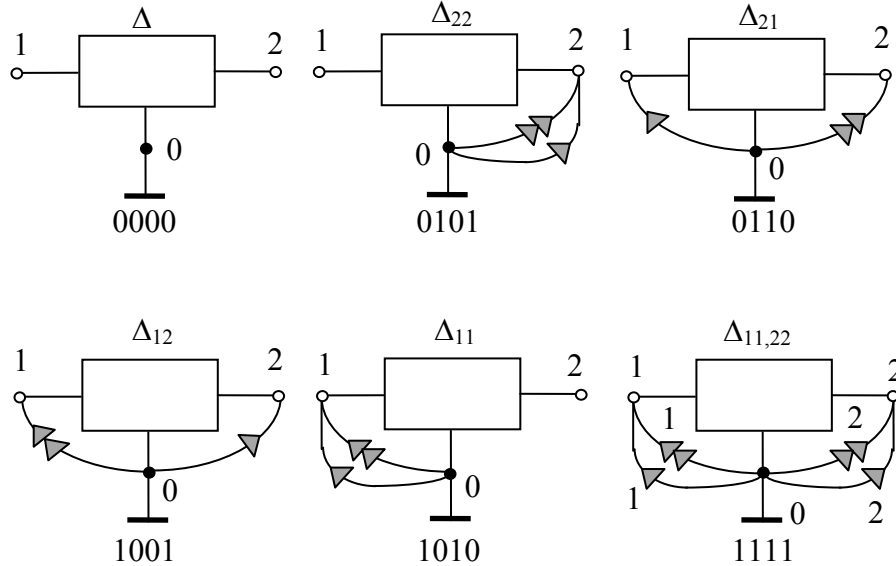


Рис. 4.11. Миноры подсхемы с тремя внешними узлами

Значение (ненулевые) миноры и АД удобно задавать двоичными векторами (ДВ) размерности $2n$, где n – число общих узлов подсхем, не считая базисного узла. число ДВ подсхемы в виде

$$l = \sum_{i=0}^n \{n i\}^2, \tag{4.11}$$

где $\{n i\}$ – число сочетаний из n элементов по i .

Имея множество ДВ для одной из подсхем, можно легко получить ДВ второй подсхемы, применив операцию дополнения двоичного числа. Это значит, что единицы в позициях ДВ заменяются нулями и наоборот. Общая формула бисекции может быть представлена в виде

$$\Delta = \sum_{i=1}^l (-1)^{\sigma_i} \Delta 1(b_i) \Delta 2(\bar{b}_i), \tag{4.12}$$

где σ_i – знак i -го слагаемого, определяемый по ДВ b_i ; $\Delta 1(b_i)$ – минор, соответствующий b_i , матрицы первой подсхемы; $\Delta 2(\bar{b}_i)$ – минор, соответствующий дополнению ДВ \bar{b}_i , матрицы второй подсхемы.

Схемно-алгебраическое выражение, иллюстрирующее бисекцию по трем узлам, представлено на рис. 4.12.

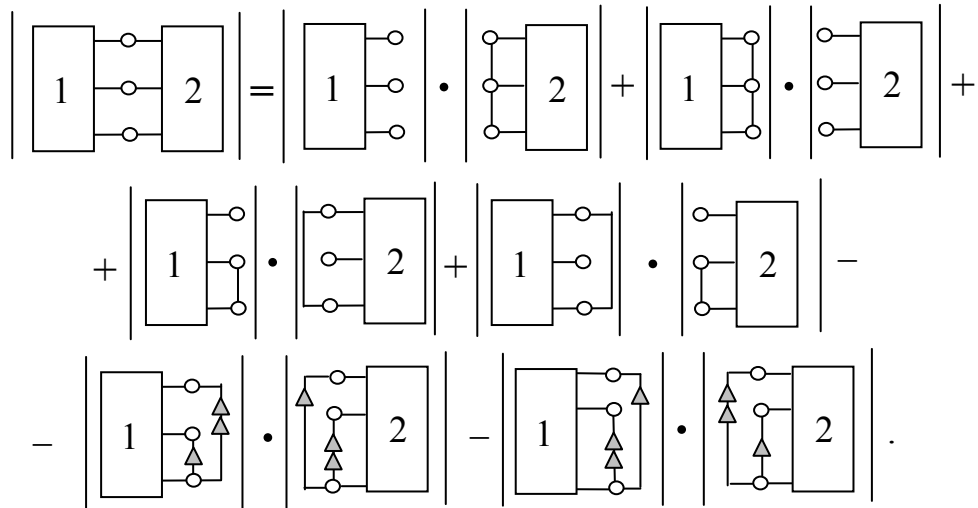


Рис. 4.12. Бисекция схемы по трем узлам

Топологический метод объединения подсхем. Множества внешних узлов объединяемых подсхем, как правило, не совпадают с множеством их общих узлов. В этом случае необходимо рассматривать согласно формуле (4.12) только те позиции ДВ, которые относятся к узлам, являющимся общими узлами для обеих подсхем. Оставшиеся позиции ДВ непосредственно переносятся во вновь формируемый ДВ объединенной схемы. Таким образом, взаимно однозначное соответствие миноров, присущее формуле (4.12), нарушается и некоторый минор одной подсхемы оказывается совместным с двумя и более минорами другой подсхемы.

Если среди общих узлов объединяемых подсхем отсутствуют узлы, являющиеся одновременно внешними узлами объединенной схемы, то ДВ совместных миноров подсхем должны дополнять друг друга в части позиций, соответствующих общим узлам подсхем. В качестве примера выполним объединение подсхем, образующих схему на рис. 4.13.

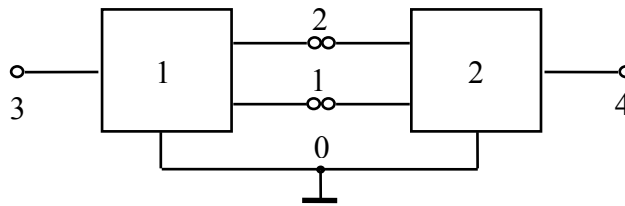


Рис. 4.13. Пример объединения подсхем

Для обозначения позиций ДВ первой и второй подсхем удобно выбрать кортежи 312312 и 124124. Чтобы установить совместность миноров подсхем, необходима информация, размещенная в позициях 1212 ДВ этих подсхем. При нахождении знака пары совместных ДВ также используются только эти позиции.

Внешними узлами объединенной схемы являются собственные узлы 3 и 4 подсхем 1 и 2. Следовательно, размерность ДВ этой схемы равна

четырем, а число ДВ или число миноров схемы равно шести. ДВ объединенной схемы приведены слева в табл. 4.1. Справа указаны пары совместных миноров подсхем с соответствующими знаками перед скобками. Произведения миноров подсхем (справа) в сумме с учетом знаков образуют минор объединенной схемы (слева).

Таблица 4.1.

ДВ объединенной схемы: 3434	Совместные пары миноров объединяемых подсхем
0000	+(1,19), +(2,13), -(3,12), -(5,7), +(6,6), +(8,1)
0101	+(1,20), +(2,15), -(3,14), -(5,9), +(6,8), +(8,2)
0110	+(4,16), -(7,10), +(9,4), -(10,3)
1001	+(11,18), -(12,17), +(14,11), -(17,5)
1010	+(13,19), +(15,13), -(16,12), -(18,7), +(19,6), +(20,1)
1111	+(13,20), +(15,15), -(16,14), -(18,9), +(19,8), +(20,2)

Миноры объединенной схемы содержат всю информацию о ее ССФ. Нахождение знака слагаемых миноров объединенной схемы усложняется, когда обозначения позиций ДВ подсхем неупорядочены. Упорядочение позиций первой подсхемы предусматривает их приведение к виду: собственные узлы – общие узлы. Напротив, позиции ДВ второй подсхемы считаются упорядоченными, если они приведены к виду: общие узлы – собственные узлы. При этом порядок следования общих узлов в обозначениях позиций ДВ обеих подсхем должен быть одинаков. Таким образом, топологическое правило нахождения знака требует учета двух составляющих $(-1)^{d+h}$, где d – число инверсий, требующихся для упорядочения ДВ первой и второй подсхем; h – число инверсий в подстановке, образованной из номеров генераторов и приемников, которые инцидентны общим узлам подсхем.

Если среди общих узлов объединяемых подсхем имеются узлы, являющиеся одновременно внешними узлами объединенной схемы, то следует использовать обобщенное условие совместности ДВ. Для доказательства этого условия вводится дополнительный узел, соединенный короткозамкнутой ветвью, то есть вырожденным нуллором, с общим внешним узлом. Дополнительный узел рассматривается в качестве собственного узла одной из подсхем. Таким образом, задача приводится к рассмотренному ранее случаю, когда у подсхем отсутствуют общие внешние узлы.

Два ДВ совместны, если результат поэлементного сложения содержимого каждой из общих позиций этих ДВ отличен от нуля.

При формировании объединенного ДВ содержимое собственных позиций ДВ объединяемых подсхем переносится без изменений в ДВ объединенной схемы. Содержимое каждой из позиций объединенного ДВ,

формируемых для общих внешних узлов этих подсхем, равно поэлементному произведению содержимого соответствующих позиций ДВ объединяемых подсхем.

Алгоритм объединения двух подсхем.

1. Парное сравнение ДВ подсхем и выявление пар совместных ДВ. Для этого используются позиции ДВ, соответствующие общим узлам подсхем, и условие совместности.

2. Приведение совместных пар ДВ к ДВ объединенной схемы. В объединенный ДВ в первую очередь заносится содержимое позиций, относящихся к собственным узлам первой подсхемы. Далее рассматриваются позиции, соответствующие общим внешним узлам. В объединенный ДВ заносится единица только в том случае, если содержимое соответствующих позиций в ДВ подсхем отлично от нуля. В противном случае объединенный ДВ дополняется нулем в позиции, соответствующей общему внешнему узлу. Формирование объединенного ДВ завершается учетом содержимого позиций, относящихся к собственным узлам второй подсхемы. Параметр найденного ДВ равен произведению миноров исходных подсхем.

3. Определение знаков совместных пар миноров объединяемых подсхем. Если в позициях общих внешних узлов обоих ДВ содержатся единицы, то ДВ первой подсхемы модифицируется путем помещения в соответствующую позицию нуля. Такая модификация необходима, поскольку единица из ДВ первой подсхемы перешла в объединенный ДВ подсхем. Далее применяется топологическое правило и знак рассчитывается по формуле $(-1)^{d+h}$.

4. Приведение подобных членов среди параметров объединенных ДВ по виду ДВ и образование миноров объединенной схемы. Перед параметром объединенного ДВ учитывается знак соответствующей пары миноров объединяемых подсхем.

Специального рассмотрения заслуживают случаи, когда подсхемы включают идеальные ОУ. Среди миноров таких подсхем могут быть миноры, тождественно равные нулю, если подсоединение нуллора в соответствии с ДВ минора приводит к получению вырожденной схемы. Это обусловлено тем, что идеальный ОУ имеет статус нуллора, и возможно образование контуров, содержащих только нораторы или только нуллаторы (см. табл. 4.1). Наличие нулевых миноров позволяет значительно сократить количество ДВ, подлежащих рассмотрению, как при анализе подсхем, так и при их объединении. Для этого необходимо использовать правила, учитывающие условие совместности ДВ объединяемых подсхем.

Правило 1. Если внешний узел подсхемы совпадает с выходным узлом идеального ОУ, принадлежащего этой подсхеме, то в первой половине позиций ДВ содержимое позиции этого внешнего узла равно нулю.

Правило 2. Если внешний узел подсхемы совпадает с выходным узлом идеального ОУ, принадлежащего другой подсхеме, то в первой половине позиций ДВ содержимое позиции этого внешнего узла равно единице.

В правилах 1 и 2 предполагается, что одним из выходных узлов идеального ОУ является базисный узел схемы, что практически всегда имеет место. Дуальные правила могут быть предложены для входного узла идеального ОУ с дифференциальным входом, когда другой входной узел этого ОУ является базисным узлом схемы.

Существенным недостатком метода схемных миноров является использование для объединения подсхем сложного алгебраического алгоритма. Метод схемных миноров не создает избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых в выражениях для подсхем, но образует их при объединении подсхем. Таким образом метод схемных миноров нельзя считать обобщением схемного подхода Фойснера в диакоптика. Метод схемных миноров назван методом внешней схемной диакоптики, потому что к многополюснику подключаются внешние нулоры, что порождает дубликации в результирующих выражениях схемного определителя. Чтобы исключить избыточность формируемых выражений, была разработана так называемая «внутренняя» схемная диакоптика, в основе которой лежит «препарирование» символьного определителя подсхемы, подключенной к внешнему многополюснику. Внешний многополюсник представляет собой произвольную схему, к которой может быть подключена рассматриваемая подсхема.

Метод *Д*-деревьев. Метод *Д*-деревьев создает взаимно уничтожающиеся слагаемые в выражениях, как для подсхем, так и при их объединении (поскольку использует избыточную унитарную модель ИТУН, содержащую один и тот же параметр 4 раза – два с положительным и два с отрицательным знаком). Для увеличения точности выражений, сформированных по методу *Д*-деревьев, приходится использовать трудоемкие алгоритмы локализации и исключения взаимно уничтожающихся слагаемых [24, 150]. Другим недостатком метода *Д*-деревьев является ограничение на элементный состав – он не допускает УИ, кроме ИТУН, а также задание двухполюсных элементов сопротивлениями. В то же время метод обладает простым топологическим алгоритмом объединения подсхем, свободным от алгебраических операций.

Метод нулорных схем. С помощью нулоров структурно-весовое выражение для определителя подсхемы представляется в виде суммы произведений определителей нулорных схем и их весовых коэффициентов. Нулорной схемой для произвольной линейной неавтономной подсхемы будем называть схему, содержащую в своем составе только нулоры и короткозамкнутые ветви (аналогичная схема именуется в [275] элементарной активной схемой).

Множество нулловых схем строится, как и множество K -деревьев, на основе всех узлов подсхемы. Оно может быть сведено к минимальному числу схем, которые, как и K -деревья на полюсах подсхемы, содержат только полюса подсхемы. Такие нулловые схемы назовем базисными нулловыми схемами (кратко базисными схемами).

Сложность САФ n -полюсной подсхемы определяется числом нулловых схем. Максимальное число (верхняя оценка) нулловых схем для подсхемы вычисляется по формуле [171]

$$N_n = \sum_{k=0}^{n-1} T_k^2, \quad (4.13)$$

где T_k – число вариантов подключения k элементов (нораторов или нуллаторов) к n -полюснику.

Следует обратить внимание, что для пассивных цепей, содержащих только двухполюсные элементы, максимальное число нулловых схем меньше числа D -деревьев [171], поскольку для пассивных многополюсников нулловые схемы не содержат нораторов и нуллаторов, а включают только короткозамкнутые ветви. Последнее объясняется тем, что формулы выделения сопротивления и проводимости содержат только операции удаления и замены элемента короткозамкнутой ветвью [260].

Число нулловых схем для пассивных цепей с двухполюсными элементами меньше также числа схемных миноров подсхемы, содержащей 3...7 полюсов. Следует отметить, что при восьми полюсах (и более) схемных миноров становится меньше, чем нулловых схем. Действительно, коэффициент возрастания числа схемных миноров при увеличении числа полюсов на единицу повышается от $S_4/S_3 = 3,33$ до $S_8/S_7 = 3,70$, а аналогичный коэффициент для нулловых схем применительно к пассивной подсхеме – от $V_4/V_3 = 3,00$ до $V_8/V_7 = 4,72$.

Таким образом, множество базисных нулловых схем, являющееся схемным аналогом множества D -деревьев и отображающее структурные свойства подсхемы, обобщает множество ненаправленных K -деревьев на ее полюсах. Нулловые и базисные нулловые схемы в отличие от ориентированных K - и D -деревьев лишены избыточности и пригодны для отображения подсхем с произвольным элементным составом.

Предлагаемый метод на основе базисных нулловых схем состоит в построении САФ каждой из подсхем анализируемой цепи, иерархическом попарном объединении подсхем с целью получения САФ исходной схемы и формировании на ее основе числителя и знаменателя искомой передаточной функции.

Для построения САФ используются неавтономные подсхемы, не имеющие между собой управляющих связей. Из исходной подсхемы неавтономная подсхема получается путем удаления независимых источников, приемников напряжения и тока. Общее число полюсов

подсхемы складывается из полюсов, общих с другими подсхемами, а также полюсов, к которым подключены независимые источники, приемники напряжения и тока. САФ, полученная на основе такой подсхемы, является универсальной – позволяет сформировать произвольную передаточную функцию относительно полюсов исходной схемы.

В методе нулловых схем объединение подсхем осуществляется попарно путем проверки совместимости базисных нулловых схем, принадлежащих объединяемым подсхемам. При этом каждая базисная схема первой подсхемы проверяется на совместимость с каждой базисной схемой второй подсхемы. Для этого создается объединенная нулловая схема, она формируется с помощью математической операции объединения полюсов и нуллов обеих базисных схем. Если полученная объединенная нулловая схема не вырождена, то она преобразуется к базисной нулловой схеме объединенной подсхемы, которая содержит в своем составе только внешние для обеих подсхем полюса. Внутренние полюса оказываются удаленными вместе с последовательными соединениями норатора и нуллатора или объединенными с внешними полюсами, с которыми они соединены перемычками [277]. При преобразовании объединенной нулловой схемы к базисной используются операции изменения направления нуллатора или норатора, преобразования параллельного соединения норатора с нуллатором и выделения нуллов.

Коэффициент базисной нулловой схемы для объединенной подсхемы равен произведению коэффициентов соответствующих базисных схем объединяемых подсхем. Сумма произведений определителей базисных схем на собственные коэффициенты образует САФ объединенной подсхемы. При этом, как и при построении САФ исходных подсхем, группируются все коэффициенты при каждой базисной схеме объединенной подсхемы.

Приведем в табл. 4.2 вычислительные характеристики пяти различных формул для знаменателя (в числителе нет вычитаний) коэффициента передачи напряжения полосового фильтра. Характеристики четырех формул, кроме формулы, полученной авторами по обобщенной теореме Лапласа, взяты из указанной в табл. 4.2 литературы. Характеристики формул по методам схемных миноров и мультисоединений совпадают, поэтому они записаны в одну строку.

Как видно, формула по методу нулловых схем имеет минимальное число вычитаний, и, следовательно, может обеспечить более высокую точность вычислений по сравнению с другими методами. При этом следует отметить, что в развернутом виде все пять формул совпадают друг с другом и содержат 3960 положительных и 1152 отрицательных слагаемых. Избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых эти формулы не содержат, что является особенностью этой схемы. В общем случае формулы по методу схемных миноров (мультисоединений) и

блочно-матричному методу (по обобщенной теореме Лапласа) содержат избыточные взаимно уничтожающиеся слагаемые.

Таблица 4.2. Вычислительные характеристики различных формул для знаменателя (определителя схемы) передаточной функции активного полосового фильтра

№	Метод построения формулы	Число операций			
		+	–	*	=
1	Нулловых схем	41	1	82	35
2	Схемных миноров, мультисоединений	24	6	54	20
3	По обобщенной теореме Лапласа	56	10	110	16
4	Блочно-матричный в программе <i>STAINS-2</i>	20	28	56	57

В работе [118] предлагается обобщение метода, рассмотренного выше. При этом для отображения подсхем используются производные схемы на внешних узлах, которые обобщают понятие нулловой схемы, поскольку нулловая схема является предельным случаем производной схемы. Производной схемой в общем случае называется одна из схем, полученных в результате применения формул выделения параметров [260]. Поэтому метод выделения параметров (метод схемных определителей) иногда называют методом производных схем.

Производной схемой на внешних узлах для произвольной линейной неавтономной подсхемы будем называть схему, не содержащую в результате выделения элементов подсхемы ее внутренних узлов. Внешними узлами (полюсами) подсхемы называются узлы, являющиеся общими с другой подсхемой (подсхемами). При этом оставшиеся узлы подсхем будем называть их внутренними узлами. В отличие от метода нулловых схем здесь необходимо ограничиться разложением САФ подсхем, достигнув образования производных схем на внешних узлах, то есть, раскрыв схемно-алгебраический определитель до исключения внутренних узлов.

Объединение подсхем выполняется таким же образом, как в методе нулловых схем. Отличие заключается в том, что требуется более сложный анализ подсхем на внешних узлах после их объединения.

Метод нулловых схем реализован в компьютерной программе *CIRTRE* (автор В. В. Филаретов). В настоящее время готовится к защите кандидатская диссертация Федора Александровича Королева, посвященная разработке схемного подхода к анализу схем по частям с устранением избыточности на уровне объединения подсхем.

Проиллюстрируем применение метода нулловых схем на примере нахождения определителя схемы на рис. 4.14.

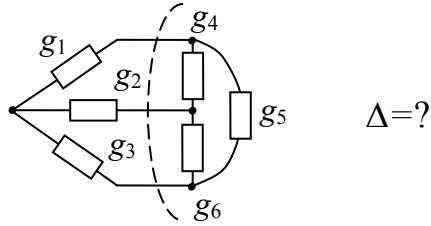
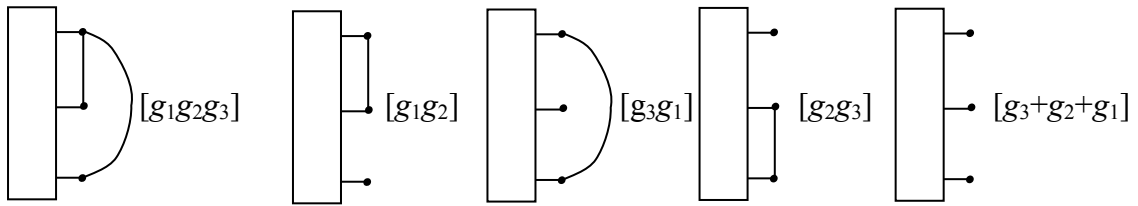


Рис. 4.14. Тестовая схема для метода нулловых схем.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{array} = g_1 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_2 \\ g_3 \end{array} + \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_2 \\ g_3 \end{array} = g_1 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_2 \\ g_3 \end{array} + \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_3 \end{array} + \\
 & + g_2 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_3 \end{array} + \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_3 \end{array} = g_1 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right\} \begin{array}{c} g_3 \end{array} + \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_3 \end{array} + \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_3 \end{array} + \\
 & + g_2 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_3 \end{array} + \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_3 \end{array} + g_3 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_3 \end{array} \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

Сгруппируем коэффициенты простейших схем для первой подсхемы:

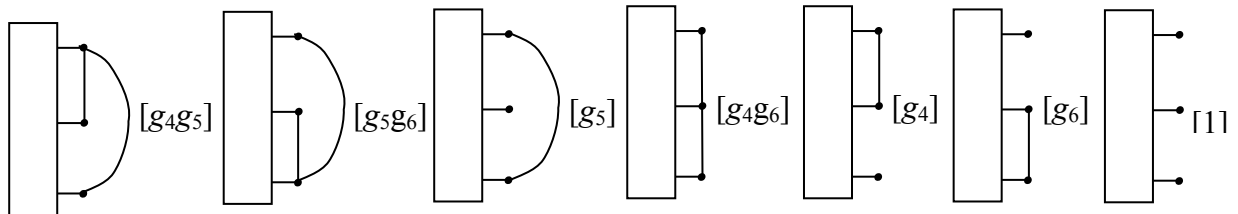


Получим инварианты для второй подсхемы:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{array} = g_5 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_4 \\ g_6 \end{array} + \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_4 \\ g_6 \end{array} = g_5 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_4 \\ g_6 \end{array} + \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_6 \end{array} + \\
 & + g_4 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_6 \end{array} + \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_6 \end{array} = g_5 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right\} \begin{array}{c} g_6 \end{array} + g_6 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_6 \end{array} + \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] \begin{array}{c} g_6 \end{array} +
 \end{aligned}$$

$$+ g_4 \left[g_6 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right] + g_6 \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \quad (4.15)$$

Сгруппируем коэффициенты простейших схем для второй подсхемы:



После получения инвариантов (4.14)–(4.15) их необходимо объединить, при этом в результате сохраняются пары, образующие невырожденные схемы. Процесс объединения инвариантов подсхем представлен в табл. 4.3.

Таблица 4.3.

	0	0	0	0	1	
	0	0	0	0	1	
	0	1	0	1	0	
	0	0	0	0	1	
	0	0	1	1	0	
	0	1	1	0	0	
	1	0	0	0	0	

Искомое символьное значение схемного определителя получается сложением коэффициентов невырожденных объединенных подсхем:

$$\Delta = (g_1 g_2 g_3) + g_1 g_2 (g_5 + g_6) + g_3 g_1 (g_4 + g_6) + g_2 g_3 (g_5 + g_4) + (g_3 + g_2 + g_1) (g_4 g_5 + g_5 g_6 + g_4 g_6)$$

4.4. Базисная задача диагностики

В 2006 году Сергей Александрович Курганов защитил докторскую диссертацию [203], в которой схемный подход был использован для получения символьного решения базисной задачи диагностики, на основе принципа компенсации [189] с применением идеальных операционных усилителей, представленных нуллорами. Принцип компенсации используется здесь для сведения задачи символьной топологической диагностики к задаче топологического анализа.

В качестве исходной диагностируемой схемы используется схема замещения цепи, содержащая вольтметры, амперметры и фазометры. Задача диагностики преобразуется к задаче анализа с помощью компенсации в диагностируемой схеме элементов с неизвестными параметрами с помощью двух схемных операций: 1) замены компенсируемого элемента норатором; 2) фиксации на некоторой произвольной ветви измеренного на ней напряжения \underline{U} или тока \underline{I} . Подчеркиванием отмечены здесь и далее комплексные действующие значения напряжений и токов. Фиксация напряжения \underline{U} осуществляется включением между соответствующими зажимами фиксирующей ветви по напряжению – последовательного соединения компенсирующего независимого источника эдс $\underline{E}^C = \underline{U}$ и нуллатором. Ток \underline{I} фиксируется включением в разрыв соответствующей ветви фиксирующей ветви по току – параллельного соединения компенсирующего независимого источника тока $\underline{J}^C = \underline{I}$ и нуллатором.

Полученная с помощью указанных преобразований схема замещения с компенсированными элементами эквивалентна исходной диагностируемой схеме. Это позволяет через напряжения и токи, используя принцип наложения [195, 251], выразить неизвестные параметры элементов [189].

При использовании неявного принципа наложения в схему помещается фиксирующая ветвь в виде последовательного соединения нуллатора с источником напряжения, управляемым напряжением или током опорного источника. Ветви с независимыми источниками напряжения и тока замещаются соответствующими источниками, управляемыми также напряжением опорного источника.

Схему замещения с компенсированными элементами можно преобразовать путем декомпенсации искомого сопротивления (возврата его в схему) и замены опорного источника норатором с противоположным направлением. Полученная в результате схема будет называться схемой с декомпенсированным элементом. Данное преобразование позволяет записать искомое сопротивление в виде

$$Z_s = -\frac{\Delta_Z}{\Delta^Z}, \quad (4.16)$$

где Δ_Z, Δ^Z – определители производных схем, полученных из схемы с декомпенсированным элементом путем стягивания (замены идеальным проводником) и удаления соответственно сопротивления Z_s . Формула (4.16) может быть выражена схемно-алгебраической формулой, представленной на рис. 4.15.

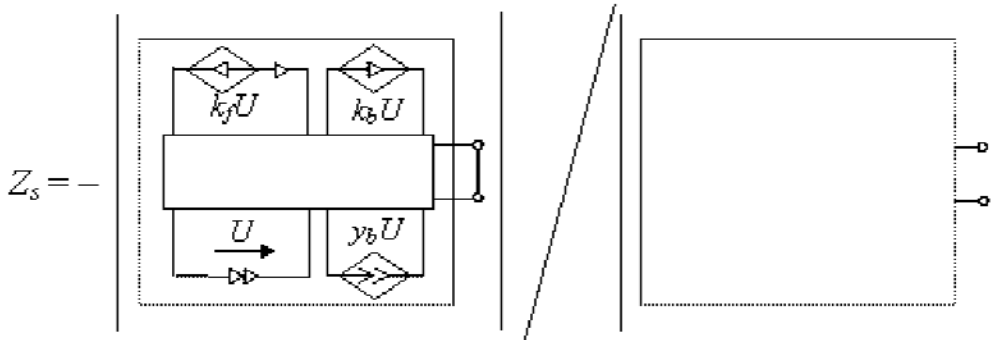


Рис. 4.15. Диагностическое САФ сопротивления на основе собственного опорного источника

Искомая проводимость будет найдена по формуле:

$$Y_s = -\frac{\Delta^Y}{\Delta_Y}, \quad (4.17)$$

где Δ^Y, Δ_Y – определители схем, производных от схемы с декомпенсированным элементом, в которой сопротивление Z_s заменено на проводимость Y_s ; верхний и нижний индексы при символе Δ означают удаление и стягивание элемента Y_s соответственно.

Полученные диагностические формулы (4.16) и (4.17) используют схемные операции стягивания и удаления, известные по формулам Фойснера для выделения сопротивления (1.1) и проводимости (1.2).

Диагностическая формула для параметров УИ аналогична (3.7) и может быть представлена в обобщенном виде

$$\chi = -\frac{\Delta(\chi=0)}{\Delta(\chi \rightarrow \text{НУИ})}, \quad (4.18)$$

где χ – обобщенный параметр УИ; $\Delta(\chi=0)$ и $\Delta(\chi \rightarrow \text{НУИ})$ – определители схемы с декомпенсированным элементом, в которой рассматриваемый УИ нейтрализован или преобразован в нулор соответственно. Знаменатель (4.18) для всех УИ одинаков, поскольку преобразование УИ в нулор осуществляется независимо от типа УИ. В схемно-алгебраическом виде формула для параметров УИ на примере ИТУТ представлена на рис. 4.16.

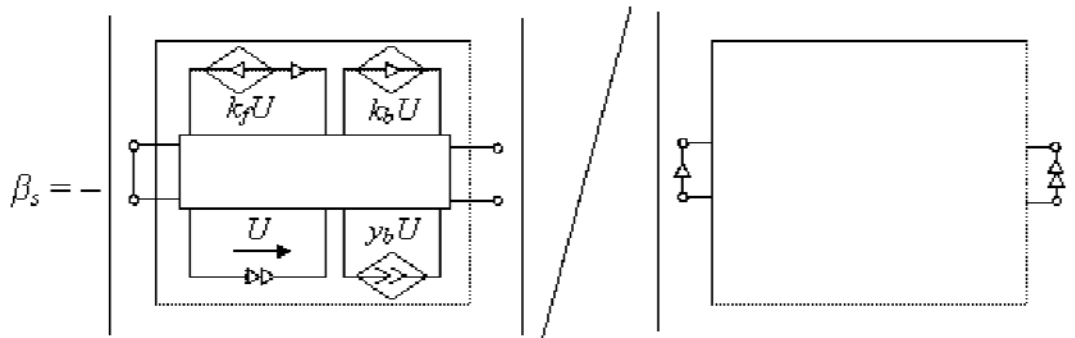


Рис. 4.16. Диагностическое САФ ИТУТ на основе собственного опорного источника

Алгебраическая формула для параметра независимого источника эдс имеет вид

$$\underline{E}_s = \frac{\Delta(\underline{E}_s = 0)}{\Delta(\text{ГНУИ} \Rightarrow \underline{E}_s; \underline{U} = 0)}, \quad (4.19)$$

где $\Delta(\underline{E}_s = 0)$ – определитель схемы с декомпенсированным элементом при нейтрализованном источнике \underline{E}_s ; $\Delta(\text{ГНУИ} \Rightarrow \underline{E}_s; \underline{U} = 0)$ – определитель этой же схемы, в которой норатор перемещен на место эдс \underline{E}_s , а приемник напряжения \underline{U} заменен идеальным проводником. Формула (4.19) для параметров независимого источника эдс может быть записана в схемно-алгебраическом виде (рис. 4.17).

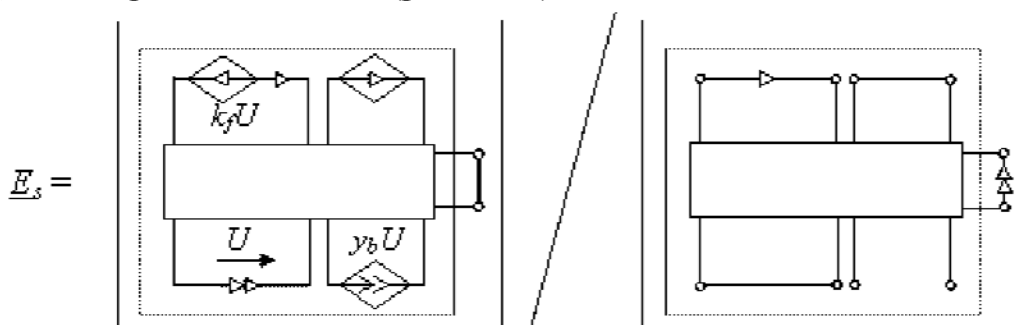


Рис. 4.17. Диагностическое САФ независимого источника ЭДС на основе собственного опорного источника

Аналогичные формулы могут быть получены для независимого источника тока. Соответствующее алгебраическое выражение имеет вид

$$\underline{J}_s = \frac{\Delta(\underline{J}_s = 0)}{\Delta(\text{ГНУИ} \Rightarrow \underline{J}_s; \underline{U} = 0)}, \quad (4.20)$$

где $\Delta(\underline{J}_s = 0)$ – определитель схемы с декомпенсированным элементом при нейтрализованном искомом источнике \underline{J}_s . Знаменатель (4.20) совпадает со знаменателем формулы (4.19) для определения эдс.

Диагностические формулы (4.16)–(4.20) позволяют получить при соблюдении правил первоочередного выделения параметров с максимальным участием [265] символьные выражения для искомых параметров элементов с меньшей трудоемкостью и в более компактной форме с меньшим числом вычислительных операций по сравнению с известной методикой [11]. Использование неявного принципа наложения обеспечивает экономию операций умножения на 20–40% при одновременном сокращении числа сложений [195, 251]. Уменьшение количества операций будет наблюдаться как в числителе, так и в знаменателе символьного выражения параметра.

Предложенные выше диагностические формулы получены для случая опорного и измеренного напряжений. Нетрудно получить аналогичные

формулы в случае опорного и измеренного токов. Для этого строится схема с декомпенсированным элементом на основе опорного источника тока в соответствии с обобщенной обратной теоремой о компенсации, а вместо фиксирующей ветви по напряжению используется фиксирующая ветвь по току [189].

4.5. Раскрытие матричных определителей

Начала теории определителей, истоки которой восходят к работе Готфрида Лейбница 1693 года [69], содержат некоторое методическое противоречие. С одной стороны, определитель матрицы в виде суммы отдельных слагаемых можно найти без использования порядковой нумерации строк и столбцов, применив для этого, например, буквенные обозначения. С другой стороны, желая получить компактное (вложенное) выражение определителя с помощью разложения *Лапласа* по строке (столбцу) или нескольким строкам (столбцам), приходится использовать понятие алгебраического дополнения, которое отличается от соответствующего минора матрицы знаком, учитывающим порядковые номера строк и столбцов.

Для матриц высокой размерности индуктивное построение определителя оказывается предпочтительным или единственно возможным. Разложение определителя матрицы A по некоторому элементу a_{ij} (выделение элемента a_{ij}) имеет вид

$$\Delta = (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} + \Delta(a_{ij}=0), \quad (4.21)$$

где Δ_{ij} – минор, то есть определитель матрицы, образованной из матрицы A путем вычеркивания строки i и столбца j ; $\Delta(a_{ij}=0)$ – определитель матрицы, полученной из матрицы A в результате удаления элемента a_{ij} . Формула (4.21) применяется к определителям Δ_{ij} и $\Delta(a_{ij}=0)$ рекурсивно до получения матриц первого порядка и вырожденных матриц.

Теорема Лапласа в ее общем или специальных случаях довольно широко используется при аналитическом решении систем линейных алгебраических уравнений [231] и формировании символьных схемных функций электрических цепей [290]. При этом нахождение знака требует существенной доли в затратах времени на разложение определителей. Это связано не только и не столько с наличием дополнительных операций сложения, а прежде всего с необходимостью перенумерации строк и столбцов в результате выделения элементов матриц.

Алгебраическое правило нахождения знака (формула (4.21)), возможно, обладает наглядностью при раскрытии определителей вручную. Однако в случае матриц высокой размерности, которые имеют, как правило, высокую разреженность, приходится использовать их списочное кодирование, задавая списками-множествами только ненулевые элементы.

Соответствующие методы опираются на графовые (топологические) представления и широко используются в настоящее время при численном решении систем уравнений. Таким образом, современные технологии решения систем уравнений фактически отрицают понятие матрицы как таблицы элементов [282].

Алгоритм нахождения определителя на основе сравнения порядкового номера столбца и строки. При разложении определителя матрицы в символьном (буквенном) виде также желательно ее представление в виде топологического объекта, в котором номера строк и столбцов служат лишь для указания расположения элементов и не должны непосредственно использоваться для вычисления знаков. Пусть матрица задается списком P ее ненулевых элементов. В каждом элементе списка p_k , кроме буквенного обозначения или численного значения соответствующего элемента матрицы, содержатся его координаты – номера строки и столбца. Введем функцию совпадения $sim(i, j)$, равную 1 при $i = j$ и -1 при $i \neq j$. Тогда определитель матрицы A раскрывается рекурсивно по формуле

$$\Delta = sim(i, j)a_{ij}\Delta_{ij}(i \rightarrow j) + \Delta(a_{ij} = 0), \quad (4.22)$$

где $\Delta_{ij}(i \rightarrow j)$ – определитель матрицы, которая задана списком, образованным из списка матрицы A в результате следующих преобразований: 1) вычеркивания элементов с номерами строки i и (или) столбца j ; 2) замены номера i в списке элементов матрицы на номер j . Если $i = j$, то второе преобразование не выполняется.

Выражения определителей, полученные на основе формул (4.21) и (4.22), могут различаться только знаками при некоторых подвыражениях и полностью совпадают при раскрытии скобок. Ниже приведены примеры разложения определителя матриц третьего (пример 1) и четвертого (пример 2) порядка [225] по формуле (4.22). Для наглядности список элементов помещен в матрицу.

Пример 1

$$\begin{aligned} \det \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ d_{21} & e_{22} & f_{23} \\ g_{31} & h_{32} & i_{33} \end{vmatrix} &= sim(1,1)a\Delta_{11}(1 \rightarrow 1) + sim(1,2)b\Delta_{12}(1 \rightarrow 2) + sim(1,3)c\Delta_{13}(1 \rightarrow 3) = \\ &= a \det \begin{vmatrix} e_{22} & f_{23} \\ h_{32} & i_{33} \end{vmatrix} - b \det \begin{vmatrix} d_{22} & f_{23} \\ g_{32} & i_{33} \end{vmatrix} - c \det \begin{vmatrix} d_{23} & e_{22} \\ g_{33} & h_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a(sim(2,2)e | i_{33} | + sim(2,3)f | h_{33} |) - b(sim(2,2)d | i_{33} | + sim(2,3)f | g_{33} |) - \\ &- c(sim(2,3)d | h_{33} | + sim(2,2)e | g_{33} |) = a(ei - fh) - b(di - fg) - c(-dh + eg). \end{aligned}$$

Пример 2

$$\begin{aligned}
\det \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} & d_{14} \\ e_{21} & f_{22} & g_{23} & k_{24} \\ l_{31} & m_{32} & n_{33} & o_{34} \\ p_{41} & h_{42} & r_{43} & s_{44} \end{vmatrix} &= \text{sim}(1,1)a\Delta_{11}(1 \rightarrow 1) + \text{sim}(1,2)b\Delta_{12}(1 \rightarrow 2) + \text{sim}(1,3)c\Delta_{13}(1 \rightarrow 3) + \text{sim}(1,4)d\Delta_{14}(1 \rightarrow 4) = \\
&= a \det \begin{vmatrix} f_{22} & g_{23} & k_{24} \\ m_{32} & n_{33} & o_{34} \\ h_{42} & r_{43} & s_{44} \end{vmatrix} - b \det \begin{vmatrix} e_{22} & g_{23} & k_{24} \\ l_{32} & n_{33} & o_{34} \\ p_{42} & r_{43} & s_{44} \end{vmatrix} - c \det \begin{vmatrix} e_{23} & f_{22} & k_{24} \\ l_{33} & m_{32} & o_{34} \\ p_{43} & h_{42} & s_{44} \end{vmatrix} - d \det \begin{vmatrix} e_{24} & f_{22} & g_{23} \\ l_{34} & m_{32} & n_{33} \\ p_{44} & h_{42} & r_{43} \end{vmatrix} = \\
&= a[\text{sim}(2,2)f\Delta_{22}(2 \rightarrow 2) + \text{sim}(2,3)g\Delta_{23}(2 \rightarrow 3) + \text{sim}(2,4)k\Delta_{24}(2 \rightarrow 4)] - b[\text{sim}(2,2)e\Delta_{22}(2 \rightarrow 2) + \\
&\quad + \text{sim}(2,3)g\Delta_{23}(2 \rightarrow 3) + \text{sim}(2,4)k\Delta_{24}(2 \rightarrow 4)] - c[\text{sim}(2,3)e\Delta_{23}(2 \rightarrow 3) + \text{sim}(2,2)f\Delta_{22}(2 \rightarrow 2) + \\
&\quad + \text{sim}(2,4)k\Delta_{24}(2 \rightarrow 4)] - d[\text{sim}(2,4)e\Delta_{24}(2 \rightarrow 4) + \text{sim}(2,2)f\Delta_{22}(2 \rightarrow 2) + \text{sim}(2,3)g\Delta_{23}(2 \rightarrow 3)] = \\
&= a \left[f \det \begin{vmatrix} n_{33} & o_{34} \\ r_{43} & s_{44} \end{vmatrix} - g \det \begin{vmatrix} m_{33} & o_{34} \\ h_{43} & s_{44} \end{vmatrix} - k \det \begin{vmatrix} m_{34} & n_{33} \\ h_{44} & r_{43} \end{vmatrix} \right] - b \left[e \det \begin{vmatrix} n_{33} & o_{34} \\ r_{43} & s_{44} \end{vmatrix} - g \det \begin{vmatrix} l_{33} & o_{34} \\ p_{43} & s_{44} \end{vmatrix} - k \det \begin{vmatrix} l_{34} & n_{33} \\ p_{44} & r_{43} \end{vmatrix} \right] - \\
&- c \left[-e \det \begin{vmatrix} m_{33} & o_{34} \\ h_{43} & s_{44} \end{vmatrix} + f \det \begin{vmatrix} l_{33} & o_{34} \\ p_{43} & s_{44} \end{vmatrix} - k \det \begin{vmatrix} l_{33} & m_{34} \\ p_{43} & h_{44} \end{vmatrix} \right] - d \left[-e \det \begin{vmatrix} m_{34} & o_{33} \\ h_{44} & r_{43} \end{vmatrix} + f \det \begin{vmatrix} l_{34} & n_{33} \\ p_{44} & r_{43} \end{vmatrix} - g \det \begin{vmatrix} l_{34} & m_{33} \\ p_{44} & h_{43} \end{vmatrix} \right] = \\
&= a[f\{\text{sim}(3,3)n\Delta_{33}(3 \rightarrow 3) + \text{sim}(3,4)o\Delta_{34}(3 \rightarrow 4)\} - g\{\text{sim}(3,3)m\Delta_{33}(3 \rightarrow 3) + \text{sim}(3,4)o\Delta_{34}(3 \rightarrow 4)\} - \\
&\quad - k\{\text{sim}(3,4)m\Delta_{34}(3 \rightarrow 4) + \text{sim}(3,3)n\Delta_{33}(3 \rightarrow 3)\}] - b[e\{\text{sim}(3,3)n\Delta_{33}(3 \rightarrow 3) + \text{sim}(3,4)o\Delta_{34}(3 \rightarrow 4)\} - \\
&\quad - g\{\text{sim}(3,3)l\Delta_{33}(3 \rightarrow 3) + \text{sim}(3,4)o\Delta_{34}(3 \rightarrow 4)\} - k\{\text{sim}(3,4)l\Delta_{34}(3 \rightarrow 4) + \text{sim}(3,3)n\Delta_{33}(3 \rightarrow 3)\}] - \\
&\quad - c[-e\{\text{sim}(3,3)m\Delta_{33}(3 \rightarrow 3) + \text{sim}(3,4)o\Delta_{34}(3 \rightarrow 4)\} + f\{\text{sim}(3,3)l\Delta_{33}(3 \rightarrow 3) + \text{sim}(3,4)o\Delta_{34}(3 \rightarrow 4)\} - \\
&\quad - k\{\text{sim}(3,3)l\Delta_{33}(3 \rightarrow 3) + \text{sim}(3,4)m\Delta_{34}(3 \rightarrow 4)\}] - d[-e\{\text{sim}(3,4)m\Delta_{34}(3 \rightarrow 4) + \text{sim}(3,3)n\Delta_{33}(3 \rightarrow 3)\} + \\
&\quad + f\{\text{sim}(3,4)l\Delta_{34}(3 \rightarrow 4) + \text{sim}(3,3)n\Delta_{33}(3 \rightarrow 3)\} - g\{\text{sim}(3,4)l\Delta_{34}(3 \rightarrow 4) + \text{sim}(3,3)m\Delta_{33}(3 \rightarrow 3)\}] = \\
&= a[f\{n | s_{44} | -o | r_{44} | \} - g\{m | s_{44} | -o | h_{44} | \} - k\{-m | r_{44} | +n | h_{44} | \}] - \\
&\quad - b[e\{n | s_{44} | -o | r_{44} | \} - g\{l | s_{44} | -o | p_{44} | \} - k\{-l | r_{44} | +n | p_{44} | \}] - \\
&\quad - c[-e\{m | s_{44} | -o | h_{44} | \} + f\{l | s_{44} | -o | p_{44} | \} - k\{l | h_{44} | -m | p_{44} | \}] - \\
&\quad - d[-e\{-m | r_{44} | +n | h_{44} | \} + f\{-l | r_{44} | +n | p_{44} | \} - g\{-l | h_{44} | +m | p_{44} | \}] = \\
&= a[f(ns - or) - g(ms - oh) + kmr - knh] - b[ens - eor - gls + gop + klr - knp] - \\
&\quad - c[-ems + eoh + fls - fop - klh + kmp] - d[emr - enh - flr + fnp + glh - gmp].
\end{aligned}$$

Таким образом, в формуле (4.22) операция сложения номеров строки и столбца заменена операцией сравнения, которая применима не только к цифровым, но и к буквенным, знаковым и т. д. объектам. Затраты на изменение пометок объектов несопоставимо меньше тех, которые требуются при порядковой нумерации строк и столбцов после выделения очередного элемента матрицы по формуле (4.1) [61].

Для доказательства формулы (4.22) используется то обстоятельство, что матрица порядка n может быть отображена электрической схемой с n^2 источниками тока, управляемыми напряжением, которая имеет $n + 1$ узлов [263]. При разложении определителя такой схемы используем метод стягивания и удаления ветвей [277]. Соответствующая формула применительно к рассматриваемому случаю будет иметь вид

$$\Delta = \text{sim}(i, j)s_{i_0 j_0} \Delta_s + \Delta(s_{i_0 j_0} = 0), \quad (4.23)$$

где $s_{i_0 j_0}$ – параметр источника тока, направленного от узла i к узлу 0 , управляемого напряжением, ориентированным от узла j к узлу 0 ; Δ_s – определитель схемы, полученной из первоначальной схемы в результате следующих преобразований: 1) стягивание генератора (приемника) выделяемого управляемого источника таким образом, чтобы генераторы тока (приемники напряжения), которые присоединены к узлу i (узлу j), переключились на узел 0 ; 2) объединение узлов i и j ; $\Delta(s_{i_0 j_0} = 0)$ – определитель схемы, образованной из первоначальной схемы путем нейтрализации выделяемого управляемого источника.

Преобразование 1 в формуле (4.23) соответствует вычеркиванию строки i и столбца j в матрице A , а преобразование 2 изоморфно замене номеров $i \rightarrow j$, что доказывает формулу (4.22) и подтверждает эквивалентность вложенных выражений определителей матрицы и отображающей ее схемы, получаемых с помощью формул (4.22) и (4.23).

Операции со схемой, отображающей матрицу A , изоморфны операциям с полной [231] матрицей, полученной из матрицы A добавлением базисных $(n-1)$ -й строки и $(n-1)$ -го столбца, содержащих избытки строк и столбцов соответственно

$$a_{i,n+1} = -\sum_{j=1}^n a_{ij} \quad \text{и} \quad a_{n+1,i} = -\sum_{j=1}^n a_{ji}.$$

Сумма элементов всех строк, как и столбцов, неопределенной матрицы равна нулю, а операции над ней в соответствии с формулой (4.22) приводят к нахождению ее минора, являющегося искомым определителем.

Важную роль в приложениях, в частности в теории электрических цепей [231, 236], играют неопределенные матрицы общего вида, когда параметры элементов схемы могут быть расположены в четырех позициях матрицы вне базисных строки и столбца. Параметр некоторого элемента дважды входит в соответствующую строку или столбец – один раз с положительным знаком, а другой раз с отрицательным. Сложение этих строк и столбцов влечет исчезновение указанного параметра в производной матрице. Данное обстоятельство по существу учитывается и в формуле (4.22), но в качестве второй строки и второго столбца используются базисные строка и столбец, поэтому результат сложения не отображается в самой матрице.

Формула разложения, обобщающая формулу (4.22), имеет вид

$$\Delta = \text{sim}(i, j) a_{ik, jm} \Delta_{(i+k)(j+m)}(i \rightarrow j) + \Delta(a_{ik, jm} = 0), \quad (4.24)$$

где $a_{ik, jm}$ – параметр, входящий в четыре позиции матрицы (два раза с положительным знаком и два раза с отрицательным); $\Delta_{(i+k)(j+m)}(i \rightarrow j)$ – суммарный минор [231], то есть определитель матрицы, образованной из первоначальной матрицы в результате следующих преобразований:

1) добавления строки i к строке k и столбца j к столбцу m ; 2) вычеркивания строки i и столбца j ; 3) замены номера i на номер j в обозначениях строк и столбцов полученной матрицы.

Алгоритм нахождения определителя на основе неудаляемого элемента матрицы. Можно предложить другие варианты формул разложения матричных определителей, когда вычисление знака откладывается до последнего уровня вложенности скобочного выражения. Для этого рассмотрим разложение схемного определителя по формуле (3.7). Чтобы получить формулу, аналогичную формуле (3.7), для разложения матричного определителя, введем понятие неудаляемого элемента матрицы (НЭМ). Появление НЭМ в позиции (i,j) матрицы на пересечении строки i и столбца j влечет обнуление этих строки и столбца, а также вычеркивание других параметров в позиции (i,j) , в которой должен остаться только этот НЭМ. Численные значения НЭМ принимаются равными единице. С учетом сказанного формулы (4.21) или (4.22) приводятся к виду

$$\Delta = a_{ij}\Delta(a_{ij}\Rightarrow\text{нэм}) + \Delta(a_{ij}=0), \quad (4.25)$$

где $\Delta(a_{ij}\Rightarrow\text{нэм})$ – определитель первоначальной матрицы, в которой элементу a_{ij} придан статус НЭМ.

В результате рекурсивного применения формулы (4.25) получаются так называемые элементарные матрицы, соответствующие элементарным активным схемам в формуле (3.7) и содержащие исключительно НЭМ. Для вычисления определителя элементарной матрицы, равного 1 или -1 , можно использовать либо традиционное алгебраическое правило знаков (установление четности или нечетности числа инверсий в подстановке из номеров строк и столбцов) [231], либо предложенное выше топологическое правило (выражение (4.22) и пример 1).

Ниже рассмотрено решение предыдущего примера 1 с помощью формулы (4.27). НЭМ обозначаются номерами соответствующих строки и столбца.

Пример 3

$$\begin{aligned} \det \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ d_{21} & e_{22} & f_{23} \\ g_{31} & h_{32} & i_{33} \end{vmatrix} &= a \det \begin{vmatrix} 11 & & \\ & e_{22} & f_{23} \\ & h_{32} & i_{33} \end{vmatrix} + b \det \begin{vmatrix} & 12 & \\ d_{21} & & f_{23} \\ g_{31} & & i_{33} \end{vmatrix} + c \det \begin{vmatrix} & & 13 \\ d_{21} & e_{22} & \\ g_{31} & h_{32} & \end{vmatrix} = \\ &= a \left(e \det \begin{vmatrix} 11 & & \\ & 22 & \\ & & i_{33} \end{vmatrix} + f \det \begin{vmatrix} 11 & & \\ & & 23 \\ & & h_{32} \end{vmatrix} \right) + b \left(d \det \begin{vmatrix} & 12 & \\ 21 & & \\ & & i_{33} \end{vmatrix} + f \det \begin{vmatrix} & 12 & \\ & & 23 \\ g_{31} & & \end{vmatrix} \right) + c \left(d \det \begin{vmatrix} & & 13 \\ 21 & & \\ & & h_{32} \end{vmatrix} + \right. \\ &+ \left. e \det \begin{vmatrix} & & 13 \\ & 22 & \\ g_{31} & & \end{vmatrix} \right) = a \left(ei \det \begin{vmatrix} 11 & & \\ & 22 & \\ & & 33 \end{vmatrix} + fh \det \begin{vmatrix} 11 & & \\ & & 23 \\ & & 32 \end{vmatrix} \right) + b \left(di \det \begin{vmatrix} & 12 & \\ 21 & & \\ & & 33 \end{vmatrix} + fg \det \begin{vmatrix} & 12 & \\ & & 23 \\ 31 & & \end{vmatrix} \right) + \end{aligned}$$

$$+c \left(\begin{array}{c|c} dh \det \begin{array}{c} 21 \\ 32 \end{array} & \begin{array}{c} 13 \\ 31 \end{array} \\ \hline & \end{array} + eg \det \begin{array}{c} 22 \\ 31 \end{array} \begin{array}{c} 13 \\ 31 \end{array} \right) = a(ei - fh) + b(-di + fg) + C(dh - eg).$$

Как видно, результатом является вложенное выражение, получение которого не потребовало использования как понятия алгебраического дополнения, так и операции *sim*. Вместе с тем в процессе разложения пришлось рассмотреть столько элементарных матриц, сколько имеется слагаемых в развернутом выражении определителя. Следует отметить, что понятие НЭМ оказывается полезным и в случае, когда некоторые коэффициенты системы алгебраических уравнений принимают бесконечно большие значения [231]. Это позволяет избежать предварительного решения с символьным заданием таких коэффициентов и последующего предельного перехода для учета их бесконечно больших значений.

Схемные представления в виде определителей схемы и ее миноров позволяют также дать новую более наглядную и эффективную в компьютерной реализации интерпретацию формулам разложения матричных определителей по частям (методы схемных миноров [278], метод объединения строк-подсхем [279]). При этом знак объединения подматриц-подсхем заменяет понятие знака алгебраического дополнения и является порождением двух (а не одного) схемных миноров, что представляется логичным. Вычисление знака и в этих случаях выполняется топологически, что отвечает списочному кодированию элементов матриц [118]. Матричный аппарат нашел широкое применение в задачах моделирования электрических и электронных цепей [231]. Существенно менее разработаны вопросы использования методов теории электрических цепей для решения систем линейных алгебраических уравнений произвольной физической природы.

4.6. Реализация структурных схем электрических цепей

Схемное отображение системы уравнений. Решение задач, стоящих перед разработчиками высокотехнологичной электронной аппаратуры в условиях появления новой элементной базы, требует создания новых схемотехнических методов проектирования. Одним из перспективных направлений является транскондуктивная реализация структурных схем усилительных устройств, предложенная в работах [45, 46, 103, 112, 114, 115, 127, 128, 131, 146]. Метод позволяет создавать схемы на современной элементной базе, коэффициент передачи которых будет идентичным коэффициенту передачи исходной структуры.

В настоящее время готовится к защите кандидатская диссертация К.С. Горшкова, посвященная применению схемного подхода для цифрового и аналогового моделирования и реализации структурных схем транскондуктивными усилителями.

Структурная схема отображает физические связи между реальными элементами цепи или системы, определяющие информационные, функциональные и энергетические преобразования сигналов. Известно, что произвольную структурную схему электронного устройства можно отобразить с помощью сигнального графа [62], как показано в первом и втором столбцах табл. 4.4.

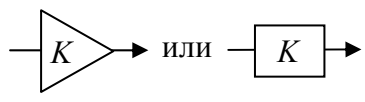
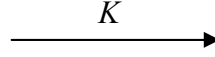
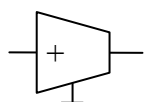
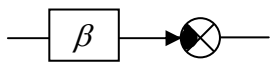
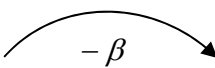
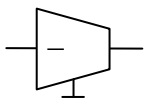


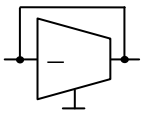
В общем виде система уравнений сигнального графа имеет вид [229]

$$X = A X + B X_0, \quad (4.26)$$

$\begin{matrix} n \times 1 & n \times n & n \times 1 & n \times m & m \times 1 \end{matrix}$

где X – вектор неизвестных переменных размерности n , X_0 – вектор известных переменных размерности m , $A = [a_{ij}]$ – матрица коэффициентов передачи дуг $n \times n$, и $B = [b_{ij}]$ – матрица единичных коэффициентов передачи от источников $n \times m$.

Таблица 4.4. Структурная схема и сигнальный граф

Номер элемента	Элементы структурной схемы	Элементы сигнального графа	Реализация на транскондуктивных усилителях
1		Дуга с положительным параметром K 	Неинвертирующий усилитель 
2	Цепь обратной связи 	Дуга с отрицательным параметром $-\beta$ 	Инвертирующий усилитель 
3	Сумматор или узел 	Вершина 	Резистор 

В неявной форме выражение (4.26) представляется в виде

$$[\mathbf{1} - A] X = B X_0, \quad (4.27)$$

$\begin{matrix} n \times n & n \times 1 & n \times m & m \times 1 \end{matrix}$

где $\mathbf{1}$ – единичная матрица.

Так, на рис. 4.18,а, и рис. 4.18,б изображены соответственно классическая структурная схема усилительного устройства с отрицательной обратной связью [112] и ее сигнальный граф при подаче на вход единичного напряжения для нахождения передаточной функции (переменные x_1 и x_2 также имеют размерность напряжения).

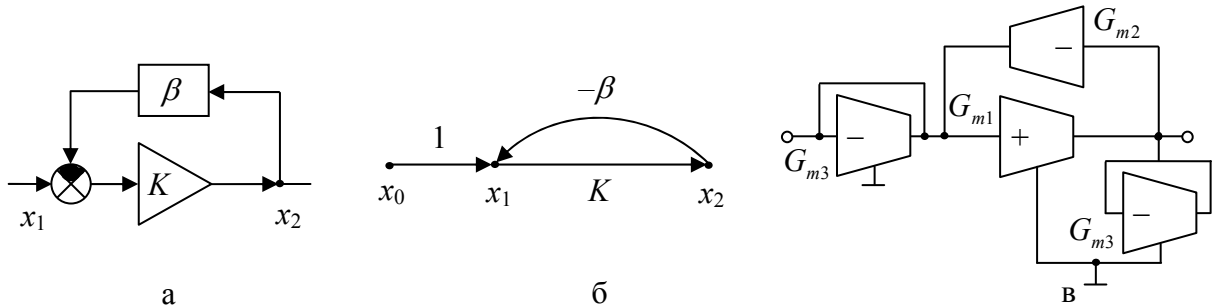


Рис. 4.18. Структурная схема усилителя с обратной связью (а), ее сигнальный граф (б) и транскондуктивная реализация (в)

Этот граф отображает следующую систему уравнений, приведенных к причинно-следственной форме:

$$x_1 = 1 - \beta x_2, \quad x_2 = K x_1, \quad (4.28)$$

или в матричном виде согласно системе (4.26)

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -K & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Коэффициент передачи сигнального графа рис. 4.18,б [60] будет равен: $S = K/(1 + K\beta)$. Такой же результат дает решение системы уравнений (4.28) по правилу Крамера

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -K & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ -K & 1 \end{vmatrix}} = \frac{K}{1 + K\beta}. \quad (4.30)$$

Матрица $[1-A]$ может быть представлена схемой с $n+1$ узлами [225, 279]. Нумерация узлов схемы соответствует нумерации строк (столбцов) матрицы, а дополнительному узлу присвоен номер 0. Каждый диагональный элемент матрицы (равный единице) отображается на схеме посредством ИТУН вида $(i,0)(i,0)$, где в первой паре скобок указаны узлы генератора ИТУН, а во второй – узлы приемника ИТУН. Ориентация генератора и приемника соответствует порядку следования номеров узлов пары. ИТУН вида $(i,0)(i,0)$ эквивалентен проводимости, равной единице, которая включена между узлами i и 0. Каждый недиагональный элемент матрицы отображается одним ИТУН, то есть элементу a_{ij} соответствует ИТУН вида $(i,0)(j,0)$. Значение параметра ИТУН считается равным значению отображаемого с помощью него элемента матрицы, которая может иметь произвольную физическую природу.

Подсоединение к схеме, отображающей матрицу, нуллора, генератор которого включен между узлами i и 0, а приемник – между узлами j и 0, соответствует удалению i -й строки и j -го столбца матрицы. Это равносильно приданию элементу a_{ij} матрицы статуса неудаляемого элемента [282]. Такие элементы позволяют отображать дуги графа,

имеющие веса, стремящиеся к бесконечности, то есть задающие идеальные ОУ. В общем случае, каждый ненулевой i -й элемент вектора BX_0 в системе уравнений (4.27) отображается на схеме источником тока вида $(0,i)$, то есть направленным от узла 0 к узлу i . Приемник с искомым напряжением направлен от соответствующего узла к узлу с номером 0.

Решение системы уравнений сигнального графа усилителя с обратной связью (рис. 4.18,б) проиллюстрировано на рис. 4.19,а–б [103].

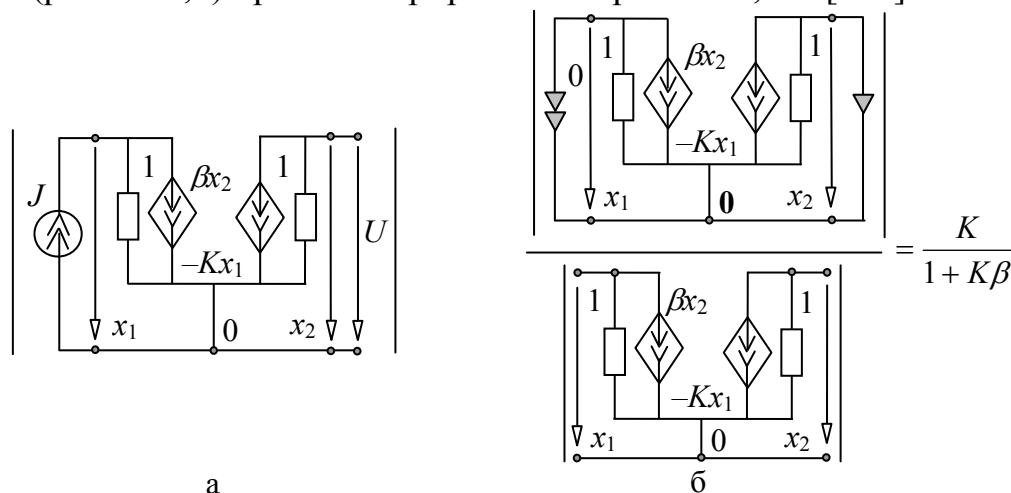


Рис. 4.19. Представление сигнального графа (рис. 4.18,б) схемой на ИТУН (а), и получение его коэффициента передачи

Обратим внимание на то, что элемент a_{12} в матрице числителя (4.30) имеет статус неудаляемого элемента, поскольку его удаление приводит к вырождению матрицы. Этому элементу в числителе схемного выражения на рис. 4.19,б соответствует ИТУН βx_2 , фактически являющийся нулором (удаление ИТУН βx_2 приводит к вырождению схемы числителя).

Транскондуктивная реализация структурных схем. Схемное отображение системы уравнений, позволяя избежать применения правила Крамера, обеспечивает ее решение в аналоговом виде. Предлагается использовать в качестве моделирующего элемента не операционный усилитель, как в традиционном аналоговом моделировании [237], а транскондуктивный усилитель, являющийся неидеальным ИТУН [45].

Возможно представить сигнальный граф либо структурную схему непосредственно в виде схемы на ИТУН или транскондукторах (с появлением некоторой инструментальной погрешности), минуя отображение матрицей. Отображение системы уравнений (4.28) отличается сменой знака у элементов, лежащих вне главной диагонали. Следовательно, дуги графа (блоки структурной схемы) с положительными коэффициентами передачи отображаются неинвертирующими усилителями (табл. 4.4, строка 1), дуги с отрицательными коэффициентами – инвертирующими усилителями (табл. 4.4, строка 2), а диагональные элементы матрицы – резисторами, построенными путем замыкания входа и выхода у инвертирующих усилителей (табл. 4.4, строка 3) [115].

Описанную методику иллюстрирует транскондуктивная реализация структурной схемы на рис. 4.18,в.

Важно подчеркнуть, что для метода транскондуктивной реализации пригодна любая структурная схема из множества разработанных к настоящему времени структур. Это позволяет реализовать удачные схемы минувших лет на новом технологическом уровне, предъявляя соответствующие требования к элементной базе.

Для автоматизации процесса получения транскондуктивных реализаций по структурным схемам электрических цепей была разработана компьютерная программа *SchemeConverter* [127, 128].

4.7. Синтез электрических цепей по схемным функциям

Восстановление схем по символьному выражению их схемного определителя. Как показали последние исследования, формулы Фойснера (1.1)–(1.2) являются ключом не только к решению задачи анализа и диагностики линейной электрической цепи, но и к решению обратной задачи – реализации исходной схемы на основе ее определителя. Успешная реализация схемы по заданному выражению определителя открывает широкие возможности для структурного синтеза электрических цепей.

Известен метод синтеза, основанный на теории ненаправленных нормализованных графов, позволяющий восстановить структуру схемы по заданной ССФ [160]. Метод имеет ограничение на тип используемых активных элементов (только ИТУН) и не позволяет получить полное множество схем инвариантных к ССФ. Использование аппарата МСО позволяет преодолеть указанные недостатки. На основе формул В. Фойснера был разработан алгоритм реализации схем с любыми линейными элементами по их ССФ, представленной в форме рационального выражения с единственной операцией деления [118, 123–125, 129–131, 135, 133].

Символьное выражение определителя D_n , на основе которого требуется реализовать схему $cir(D_n)$, состоящую из n элементов, X_1, X_2, \dots, X_n (сопротивление, проводимость или УИ) согласно формулам (1.1)–(1.2), (3.7) можно представить в виде:

$$D_n = X_1 \cdot \underbrace{\left(X_2 \cdot \overbrace{(\dots)}^{D_{(n-2)a}} + \overbrace{(\dots)}^{D_{(n-2)b}} \right)}_{D_{(n-1)a}} + \underbrace{\left(X_2 \cdot \overbrace{(\dots)}^{D'_{(n-2)a}} + \overbrace{(\dots)}^{D'_{(n-2)b}} \right)}_{D_{(n-1)b}} \quad (4.31)$$

где $D_{(n-1)a}$ – выражение, равное определителю схемы, полученной из исходной схемы $cir(D_n)$ в результате выделения элемента X_1 ; $D_{(n-1)b}$ – выражение, равное определителю схемы, полученной из исходной схемы $cir(D_n)$ в результате нейтрализации элемента X_1 ; $D_{(n-2)a}$ и $D_{(n-2)b}$ – определители схем, полученных из схемы $cir(D_{(n-1)a})$ в результате

выделения и нейтрализации элемента X_2 , соответственно; $D'_{(n-2)a}$ и $D'_{(n-2)b}$ – определители схем, полученных из схемы $cir(D_{(n-1)b})$ в результате, соответственно, выделения и нейтрализации элемента X_2 .

Из выражения (4.31) следует, что задача реализации схемы $cir(D_n)$ сводится к подключению элемента X_1 к одной из схем $cir(D_{(n-1)a})$ или $cir(D_{(n-1)b})$ таким образом, чтобы определитель полученной схемы был равен D_n . Для этого потребуется осуществить перебор вариантов подключения элемента X_1 «всеми возможными способами» к схеме $cir(D_{(n-1)a})$ или $cir(D_{(n-1)b})$ соответственно. Аналогично, для получения схемы $cir(D_{(n-1)a})$, соответствующей выражению $D_{(n-1)a}$, потребуется найти промежуточные схемы $cir(D_{(n-2)a})$ или $cir(D_{(n-2)b})$, и подключить к ним элемент X_{n-2} , и т. д. Предложенная процедура начинается в обратном порядке с элементарных схем и повторяется до тех пор, пока не будет получена искомая схема $cir(D_n)$.

Алгоритм схемной реализации электрической цепи по ССФ. В работе [123] предложен следующий алгоритм восстановления схемы по ее ССФ. Пусть N_n/D_n – символьная схемная функция, на основе которой требуется реализовать схему, состоящую из n элементов: $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m, \chi_n$ (сопротивление, проводимость или УИ).

1. Из характеристического уравнения D_n выделить параметр χ_1 . Результатом станет выражение $D_{(n-1)}$, соответствующее схеме с определителем D_n , в которой, $\chi_1 \rightarrow \infty$, либо $\chi_1 = 0$. Продолжать выделение параметров $\chi_2, \chi_3, \dots, \chi_m$ до тех пор, пока не будет получена формула $D_{(n-m)}$, соответствующая определителю простейшей схемы (рис. 4.20).

2. Реализуется перебор всех возможных вариантов подключения элементов, выделенных на шаге 1, к простейшей схеме, соответствующей определителю $D_{(n-m)}$. Всего используются два способа подключения: перебор всех возможных вариантов с расщеплением узлов и перебор всех пар узлов. Элементы последовательно подключаются в порядке, обратном порядку их выделения на предыдущем шаге: $\chi_m, \dots, \chi_2, \chi_1$. Определитель каждой схемы, полученной в результате включения элемента χ_i , сравнивается с соответствующим выражением $D_{(n-m+i)}$, полученном на шаге 1 при выделении этого элемента, если они не равны, то полученная структура считается ошибочной, если совпадают, то верной. Новые элементы следует подключать только к верным схемам до тех пор, пока не будет получено множество схем, инвариантных относительно характеристического уравнения D_n .

3. К каждой схеме из полученного на предыдущем шаге множества структур, инвариантных относительно D_n , подключаются норатор и нуллятор всеми возможными способами. Определитель каждой невырожденной схемы, образованной в результате подключения элементов нуллора, сравнивается с выражением N_n , если они не равны, то схема считается неверной, если равны, то верной. Во множестве полученных

верных схем нораторы заменяются на независимые источники эдс или тока, а нулаторы на ветви управляющего тока или напряжения, в соответствии с видом заданной ССФ.

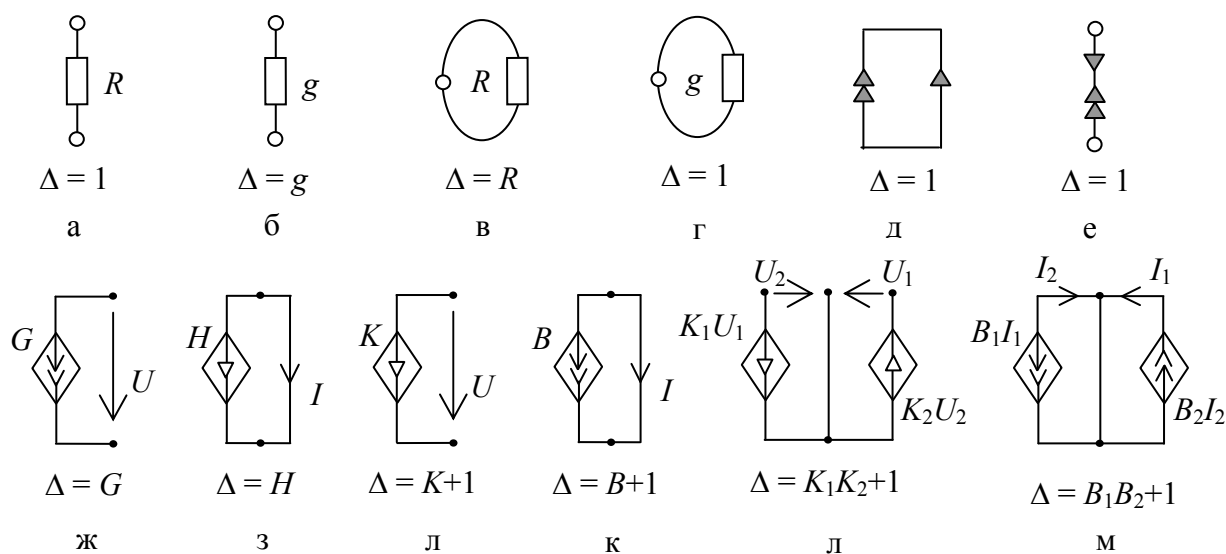


Рис. 4.20. Простейшие схемы и их определители

Алгоритм получения схемы по заданной ССФ реализован Ю.В. Токаревым в программах SymSin [124] и InterSym [130].

Реализованное по заданной ССФ множество схем во многих случаях может содержать структуры, образованные элементарными эквивалентными преобразованиями. Такие схемы можно считать изоморфными, их требуется исключать во избежание избыточности конечного результата. Это особенно важно при схемной реализации сложных активных цепей, так как количество возможных вариантов может достигать десятков тысяч.

Для исключения изоморфных схем из множества полученных при схемной реализации ЛЭЦ по заданной ССФ предлагается использовать методику установления изоморфизма на основе распределения показателей участия ветвей [131, 133]. Разработанный алгоритм установления изоморфизма, а также алгоритм выборки из полученного множества схем по расположению узла с нулевым потенциалом [129] реализованы в программе SymSin.

В работах [123, 135] приведены результаты тестирования программы SymSin, которые показывают, что реализация разреженных структур, анализ которых является наиболее простой задачей, оказывается значительно более трудоемким процессом, чем реализация полных схем. Чем более разреженной является реализуемая структура, тем большее количество возможных вариантов включения элементов необходимо рассмотреть.

Реализация схем на основе полиномиальных функций. Основным недостатком предложенной методики структурного синтеза по ССФ, существенно ограничивающим его применение, являются жесткие требования к реализуемой функции – это должна быть ССФ, параметры которой выражены в явном символьном виде, однозначно определяющем количество и тип элементов в синтезируемой цепи. Поскольку в общем случае для реализации произвольной ССФ метод использовать нельзя, его применение оказывается целесообразно лишь для расширения классов эквивалентных схем существующих ЛЭЦ. В то же время на практике, как правило, перед разработчиком стоит задача схемной реализации не ССФ, а полиномиальной функции вида

$$S(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 p^0}{b_k p^k + b_{k-1} p^{k-1} + \dots + b_0 p^0}, \quad (4.32)$$

Поскольку схемная функция (4.32) является полиномиальной, то элементный базис синтезируемой структуры будет априори содержать реактивные элементы, от числа которых зависит степень полинома, в соответствии с формулами [236]:

$$n = m_1 - m_2 - m_3, \quad (4.34) \quad k = l_1 - l_2 - l_3, \quad (4.35)$$

где $m_1 (l_1)$ – число реактивных элементов в схемном выражении числителя (знаменателя); $m_2 (l_2)$ – число независимых емкостных контуров в схемном выражении числителя (знаменателя); $m_3 (l_2)$ – число независимых индуктивных сечений в схемном выражении числителя (знаменателя).

Повторная частичная свертка знаменателя D_k для функции вида (4.32), может быть представлена в следующей форме:

$$D_k = b_k p^k + D_{k-1}, \quad D_{k-1} = b_{k-1} p^{k-1} + D_{k-2}, \quad \dots, \quad D_1 = b_1 p + D_0, \quad D_0 = b_0, \quad (4.33)$$

где D_0, D_1, \dots, D_{k-1} – определители подсхем схемного выражения знаменателя заданной функции D_k .

Разложение (4.33) будет соответствовать последовательному исключению конденсаторов и катушек индуктивностей из схемного выражения D_k , в результате которого останется либо схема с одним реактивным элементом с определителем D_1 , либо схема, состоящая из резисторов и УИ с определителем D_0 . Такую схему будем называть начальной схемой. При известном элементном базисе имеет смысл последовательное наращивание начальной схемы до схем, соответствующих выражениям D_1, D_2, \dots, D_k . После получения схемного выражения знаменателя функции (4.32) к нему нужно подключить нулор и перейти к схеме числителя.

Выбор начальной схемы для реализации произвольной функции вида (4.32) следует проводить согласно следующим правилам.

Правило 1. Если в заданной функции вида (4.32) коэффициент $b_0 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, то выражение D_0 можно рассматривать как определитель схемы, содержащей в себе резистивные двухполюсники, УИ или нуллары [147]. В этом случае начинать наращивание целесообразно с одной из схем на рис. 4.20.

Правило 2. Если коэффициенты $b_0 \neq 0$, $b_1=0$, выражению D_1 будут соответствовать простейшие схемы с реактивными элементами на рис. 4.21,а и рис. 4.21,б.

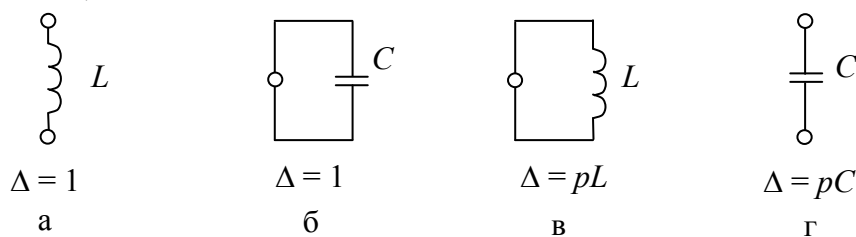


Рис. 4.21. Простейшие схемы и их определители при $b_0 \neq 0$, $b_1=0$ (а, б), и при $b_0=0$, $b_1 \neq 0$ (в, г)

Правило 3. Если $b_0 = 0$, $b_1 \neq 0$, то в качестве начальной схемы для наращивания (соответствующей D_1) может быть выбрана одна из схем на рис. 4.21,в и рис. 4.21,г. В общем случае, если $b_0=0$, ..., $b_{k-1}=0$, то выражению D_k будет соответствовать совокупность из k разомкнутых емкостных ветвей или индуктивных контуров. Отметим, что в этом случае начальная схема не будет простейшей.

Проверку на соответствие определителей схем, получаемых в ходе наращивания, выражениям $D_1, D_2, \dots, D_{k-1}, D_k$ удобно проводить путем сравнения коэффициентов соответствующих полиномов. При этом не имеет значения, какие параметры входят в тот или иной коэффициент, достаточно чтобы выражение D_k и определитель полученной схемы имели одинаковые нулевые коэффициенты. Например, соответствие схемы выражению $D_2 = b_2 p^2 + b_1 p + b_0 p^0$ будет обеспечиваться, если определитель схемы имеет коэффициенты $b_0 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$. Для выражения $D_2 = b_2 p^2 + b_0 p^0$ коэффициенты определителя схемы должны быть следующие $b_0 \neq 0$, $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$. Если нулевые коэффициенты совпадают, полученное схемное решение будет считаться корректным, если нет, то некорректным. Для получения символьных выражений коэффициентов полиномиальной схемной функции можно воспользоваться программой CIRSWM, которая входит в систему схемотехнического моделирования SCAD.

Согласно (4.34)–(4.35), схемы, определители которых эквивалентны выражениям D_1, D_2, \dots, D_k , будут содержать в себе реактивные элементы, количество которых не может быть меньше порядкового номера соответствующего выражения (максимальной степени полинома

выражения). Отметим, что при наращивании реактивные элементы могут включаться в схему таким образом, что их добавление не будет влиять на степень полинома определителя. Это становится возможным при выполнении следующих условий: 1) ветвь индуктивного сопротивления разомкнута (рис. 4.21,а); 2) катушка индуктивности включена в индуктивное сечение; 3) емкостная проводимость замыкается в контуре (рис. 4.21,б); 4) конденсатор включен в емкостной контур; 5) ветвь индуктивного сопротивления включена последовательно с элементами нуллора; 6) ветвь емкостной проводимости включена параллельно с элементами нуллора.

Очевидно, что подключение к схеме сопротивления, проводимости, управляемых источников не приводит в общем случае к изменению степени полинома определителя, при условии, что определитель существует, то есть, схема не вырождена. Исключением являются случаи, когда введение в схему нового резистивного или активного элемента приводит к нарушению условий 1-6 включения реактивных элементов, не влияющих на степень полинома.

Сформулируем некоторые свойства полиномиальных функций, имеющие значение для предложенной методики структурного синтеза.

Свойство 1. Если степень полинома числителя n больше степени полинома знаменателя k схемной функции на число равное x , то схема, соответствующая D_k , будет содержать в себе x реактивных элементов, включение которых удовлетворяет условиям 1-6. При получении схемного выражения числителя (4.32) N_n условия 1-6 будут нарушаться в результате введения элементов нуллора.

Свойство 2. Если степень полинома числителя n меньше степени полинома знаменателя k схемной функции на число равное x , то схема, соответствующая D_k , будет содержать в себе x реактивных элементов, которые при получении схемного выражения числителя (4.32) N_n в результате подключения нуллора нейтрализуются, либо подпадают под условия 1-6.

Свойство 3. Порядковый номер полученного при частичной свертке (4.33) выражения, по которому проводится проверка, будет равен числу реактивных элементов, подключенных к схеме. Если в схеме, к которой подключается резистивный или активный элемент, нет реактивных элементов, удовлетворяющих условиям 1-6, то полученные в результате невырожденные схемы считаются корректными.

Таким образом, для структурного синтеза схем на основе полиномиальных функций может быть использован тот же подход, что и для метода схемной реализации ССФ, предложенного в [123]. Особенности реализации схемы по выражению вида (4.32) обуславливаются характерными свойствами полиномиальных функций [153].

Получение оптимальных технологичных схемных решений. В ходе наращивания простейшей схемы может быть получено множество эквивалентных схем, соответствующих D_2 . Очередной элемент должен быть подключен к каждой из них, что может привести к образованию нового множества структур с определителем D_3 . Очевидно, что новый элемент должен подключаться к каждой схеме полученного множества и т.д. Реализация данного подхода, с одной стороны, гарантирует получение полного множества схем, соответствующих заданной схемной функции, с другой стороны, приводит к проблеме обработки и сортировки, что резко усложняет задачу синтеза сложных схем. Полученное множество будет включать в себя изоморфные структуры, а также структуры, не ведущие к цели. После удаления из множества этих типов структур необходимо выделить в образовавшемся подмножестве потенциально пригодных структур только эффективные.

Для получения оптимального результата синтеза, исключения непатентоспособных схемных решений и сокращения пространства перебора способов включения элемента в ходе наращивания предлагаются следующие рекомендации [147]:

1) последовательное наращивание схемы элементами заданного базиса целесообразно проводить в зависимости от критериев оптимальности: а) минимальное количество элементов, б) минимальное количество C , в) минимальное количество L , г) минимальное количество реактивных элементов, д) минимальное количество активных элементов;

2) следует исключать из полученного множества схем нетехнологичные схемные решения, в том числе

– структуры, которые могут быть разделены на две несвязные подсхемы в результате бисекции по одному узлу [147];

– структуры, содержащие разомкнутые ветви или петли резистивных двухполюсников, параллельное соединение генератора и управляющей ветви УИ;

– структуры с активными элементами, в которых генератор и управляющая ветвь УИ не имеют общей точки;

3) в ходе наращивания, после подключения очередного элемента, из полученного множества схем-претендентов следует исключать изоморфные структуры, для чего может быть использован метод установления изоморфизма по распределению показателей участия вершин и ребер [133];

4) при переходе от схемы, соответствующей D_k , к схемному выражению числителя схемной функции, элементы нуллора следует подключать таким образом, чтобы они имели общую точку. Если схема содержит в себе активные элементы, то норатор и нуллятор следует соединять с общей точкой УИ;

5) составить и рассчитать компонентные уравнения [224] для получения численных значений параметров элементов полученных схемных решений;

6) провести схемно-алгебраический анализ чувствительности полученных ЛЭЦ [195] для выбора лучшего схемного решения;

7) рассчитать входное и выходное сопротивления каждой схемы из полученного множества, для определения оптимальной схемы. Расчет может быть выполнен с помощью модуля Selector программы структурной оптимизации Switcher [139] входящей в систему схмотехнического проектирования SCAD.

Алгоритм структурного синтеза электрических цепей на основе полиномиальных схемных функций. Пусть N_n/D_k – символьная схемная функция, на основе которой требуется реализовать схему заданного элементного базиса, где n – порядок полинома числителя, k – порядок полинома знаменателя элементов. Необходимо задать элементный базис, и, согласно рекомендации 1, определить критерий оптимальности. Алгоритм структурного синтеза состоит из следующих шагов [147]:

1. Провести повторную частичную свертку знаменателя D_k функции согласно с (4.33), получить выражения D_0, D_1, \dots, D_{k-1} . Выбрать простейшую схему согласно правилам 1–3.

2. Реализовать множество схем, соответствующих знаменателю схемной функции, посредством последовательного наращивания простейшей схемы элементами выбранного базиса, с учетом выбранного критерия оптимальности и рекомендации 4 (если целью является получение технологичного решения). Поочередное подключение разнотипных элементов является рекомендуемым порядком наращивания. Получаемые в ходе наращивания схемы следует проверять на соответствие выражениям D_1, D_2, \dots, D_{k-1} , согласно свойству 3 и рекомендации 2. Если подключение очередного элемента не привело к получению ни одной корректной схемы, попробовать подключение элемента другого типа.

3. С учетом свойств 1 и 2, а также рекомендации 4 подключить к каждой полученной на предыдущем шаге схеме нулор, для получения множества схем, соответствующих числителю N_n . Исключить, если необходимо, нетехнологичные структуры согласно рекомендации 2. Заменить нораторы на независимые источники эдс или тока, а нулаторы на ветви управляющего тока или напряжения, в соответствии с видом заданной схемной функции. Выбрать из полученного множества лучшие схемные решения согласно рекомендациям 5–7.

Результатом выполнения алгоритма становится полное множество схем, инвариантных относительно заданной полиномиальной функции. Представленный алгоритм был реализован в компьютерной программе InterSyn [130], входящей в систему SCAD.

Рассмотрим несколько примеров схемной реализации полиномиальных функций с помощью предложенного алгоритма.

Пример. По функции нормированного сопротивления

$$Z(p) = \frac{45p^4 + 27p^2 + 1}{60p^3 + 5p} \quad (4.36)$$

синтезировать схему двухполюсника LC -структуры [224].

Проанализируем заданную функцию. Выберем согласно рекомендации 1 минимальное количество схемных элементов в качестве критерия оптимальности. Поскольку схема реализуется в LC -базисе, количество элементов схемы будет равно максимальной степени функции (4.36). Степень полинома числителя n схемной функции на единицу больше степени знаменателя k и равна четырем. Следовательно, согласно свойству 2, в схемном выражении знаменателя должен быть реактивный элемент, удовлетворяющий одному из условий 1–6.

Руководствуясь алгоритмом структурного синтеза, выделим в соответствии с (4.33) подвыражения $D_0=0$, $D_1=D_2=b_1p$, $D_3=D_4=b_3p^3 + D_2$ из знаменателя заданной функции (4.36). Поскольку коэффициент $b_0 = 0$, то согласно свойству 1 начинать наращивание можно со схемы на рис. 4.22,а.

Так как соотношение числа конденсаторов к числу индуктивностей в условии задачи не определено, то по второму шагу алгоритма подключаем к простейшей схеме индуктивность L_1 таким образом, чтобы полученная схема соответствовала D_2 . Отметим, что выражение определителя базовой схемы не должно измениться $D_1=D_2$, следовательно, включение ветви индуктивного сопротивления L_1 должно удовлетворять одному из условий 1–6. Очевидно, что это может быть только первое условие (рис. 4.22,б).

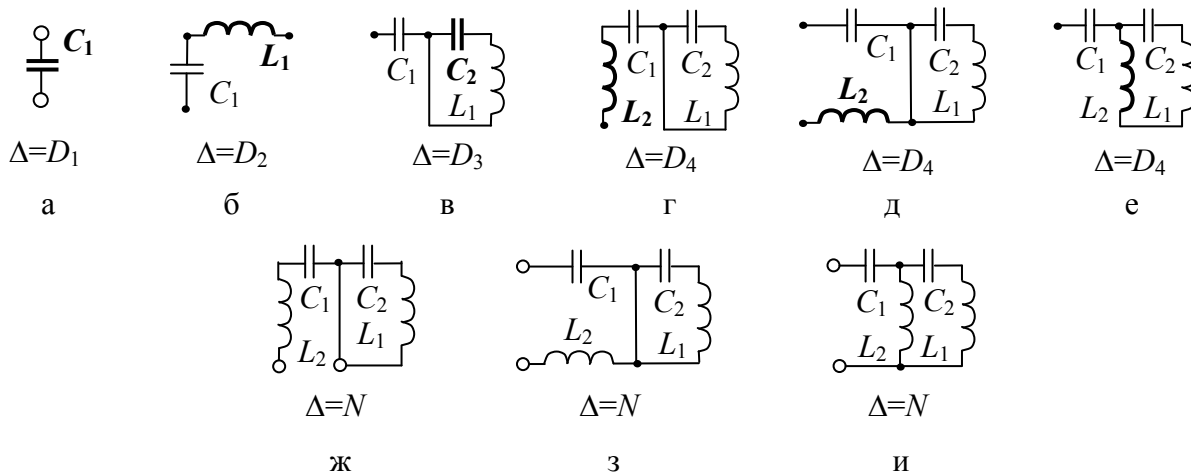


Рис. 4.22. Наращивание схемы по функции (4.36)

Далее подключаем всеми возможными способами конденсатор C_2 , сравнивая каждый раз определитель полученной схемы на соответствие с выражением D_3 , и получаем в результате схему на рис. 4.22,в. Наконец,

четвертый элемент L_1 должен быть подключен таким образом, чтобы соблюдалось равенство $D_3=D_k$. Это возможно при вариантах включения, удовлетворяющих условию 1 (рис. 4.22,г–д) или 2 (рис. 4.22,е).

Все три полученные схемы будут соответствовать знаменателю функции (4.36), поэтому следует рассмотреть возможность подключения нуллора, для нахождения структуры числителя, к каждой из них, с учетом свойства 1. В результате были получены схемные реализации функции (4.36) на рис. 4.22,ж–и. Очевидно, что схема на рис. 4.22,ж должна быть исключена, согласно, рекомендации 2, поскольку эта схема содержит так называемый «шарнирный узел». То есть, ССФ этой схемы только формально соответствует заданной схемной функции, но при эквивалентном сокращении членов ССФ выражения числителя и знаменателя необратимо исказятся. Следовательно, только схемы на рис. 4.22,з и рис. 4.22,и будут являться решением задачи синтеза по заданным условиям. Отметим, что полученные схемные реализации представляют из себя две классические формы Кауэра [236].

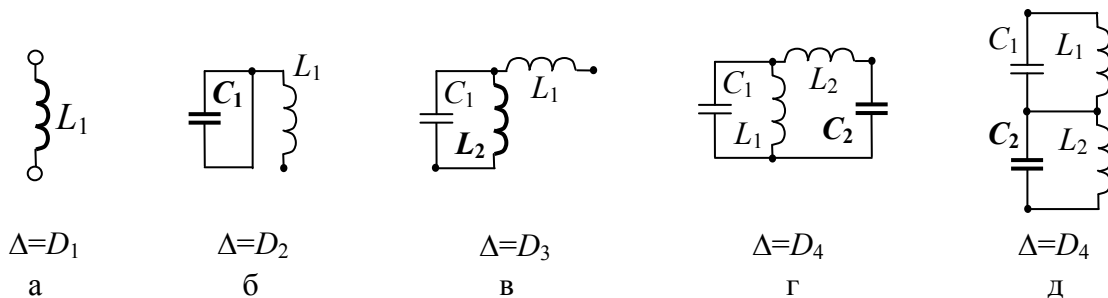
Пример. По функции нормированного сопротивления

$$Z(p) = \frac{10^6 \cdot p^3 + 1,5 \cdot 10^{14} p}{p^4 + 2 \cdot 10^8 p^2 + 0,51 \cdot 10^6}, \quad (4.37)$$

синтезировать схему двухполюсника LC -структуры [224].

В качестве критерия оптимальности выберем минимальное количество схемных элементов. Выделим из знаменателя функции (4.37) определители подсхем $D_0=0$, $D_1=D_2=1$, $D_3=b_2 p^2 + D_1$, $D_4=b_4 p^4 + D_3$. Так как коэффициент $b_0 \neq 0$, то согласно свойству 1 начнем наращивание со схемы на рис. 4.23,а.

Поскольку $D_1=D_2=1$, то к простейшей схеме следует подключить замкнутый контур с конденсатором C_1 , как показано на рис. 4.23,б, чтобы определитель схемы не изменился. Следуя указаниям алгоритма, далее подключаем в контур с конденсатором C_1 катушку L_2 , получаем схему на рис. 4.23,в, соответствующую выражению D_3 . Подключить конденсатор C_2 , чтобы после добавления нового элемента определитель схемы соответствовал D_4 , можно двумя способами, как показано на рис. 4.23,г и д.



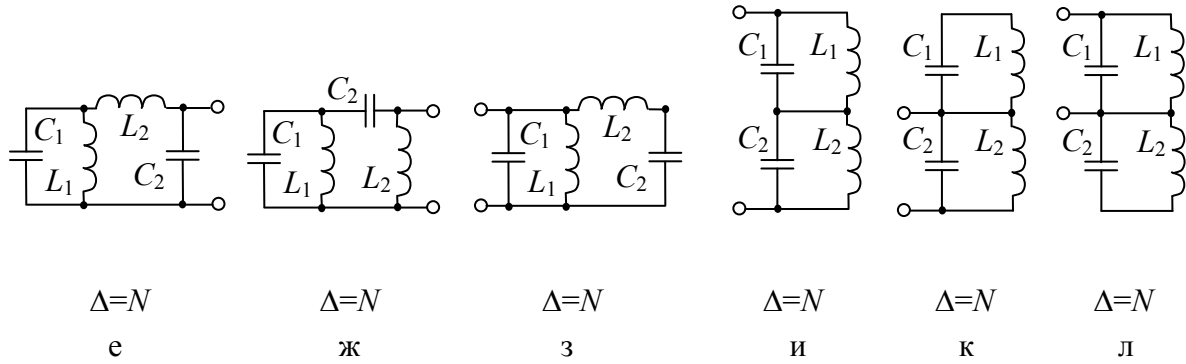


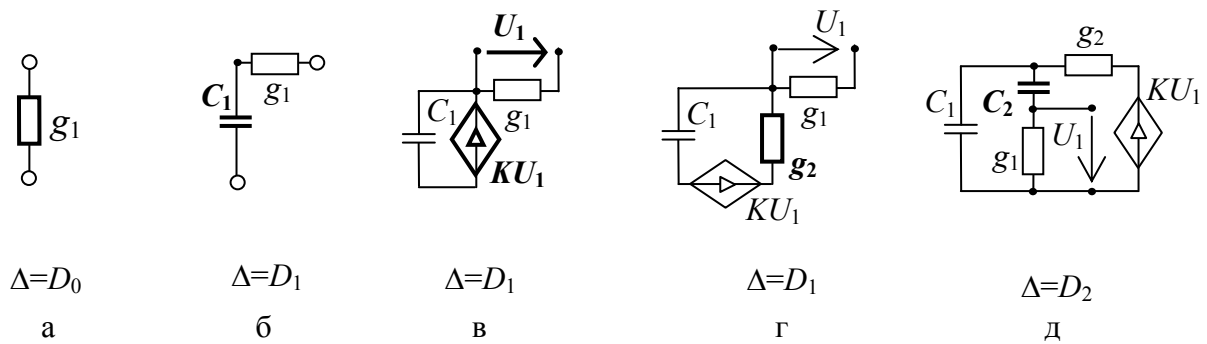
Рис. 4.23. Нарращивание схемы по функции (4.37)

Подключение нуллора к схемам на рис. 4.23,г и рис. 4.23,д, согласно свойству 2, приводит к получению эквивалентных структур на рис. 4.23,е–з и рис. 4.23,и–л соответственно. Следуя рекомендации 2, мы должны исключить из полученного множества схемы на рис. 4.23,к и рис. 4.23,л. Таким образом, решением задачи структурного синтеза по функции (4.37) становится шесть схем. Отметим, что полученный результат включает в себя как две формы Фостера [236] (рис. 4.23,з и рис. 4.23,и), так и новые структуры (рис. 4.23,е–ж), которые не могут быть получены классическими методами.

Пример 3. Реализуем передаточную функцию звена *ARC*–фильтра высокой частоты [224]:

$$S = \frac{p^2}{p^2 + 0,01p + 1}, \tag{4.38}$$

Следуя указаниям алгоритма структурного синтеза, выберем минимальное количество активных элементов в качестве критерия оптимальности. Выделим из знаменателя функции (4.38) определители подсхем $D_0=1, D_1=b_1p + D_0, D_2=b_2p^2 + D_1$. Коэффициент $b_0 \neq 0$, значит, согласно свойству 1 начинать наращивание можно со схемы на рис. 4.24,а.



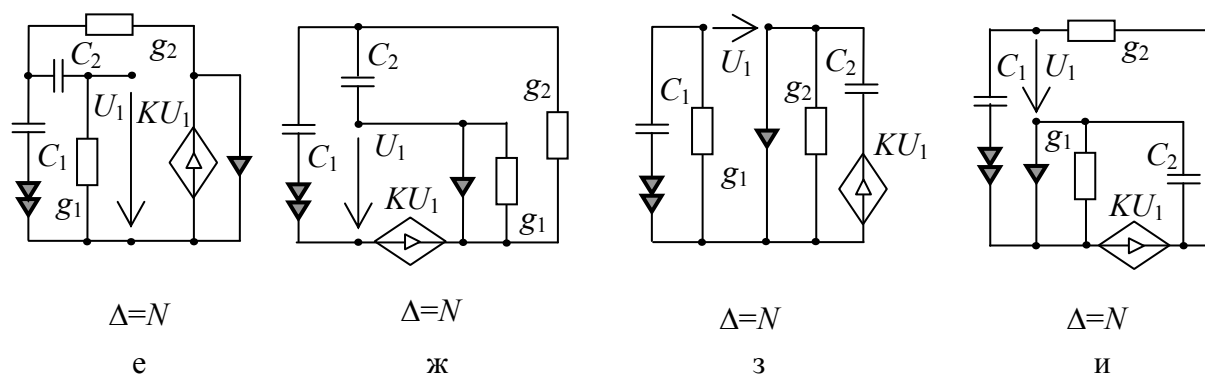


Рис. 4.24. Нарращивание схемы по функции (4.38)

При реализации схемных функций активных электрических цепей в ходе наращивания может возникнуть довольно большое количество возможных путей для получения искомой структуры, поскольку каждому выражению D_2, D_3, \dots, D_{k-1} может соответствовать сразу несколько схем. Если ставится цель получить полное множество схем, соответствующих заданной функции, требуется исследовать каждый из этих путей. Для данного примера, ограничимся рассмотрением только одного из множества возможных путей реализации функции (4.38).

Подключаем к простейшей схеме разомкнутую ветвь емкостной проводимости C_1 (рис. 4.24,б). Затем, добавляем источник напряжения, управляемый напряжением K_1 , как показано на рис. 4.24,в. Очередным элементом, который следует добавить к схеме, является проводимость g_2 . Один из возможных способов включения представлен на рис. 4.24,г. Подключение второго конденсатора позволяет получить схему, соответствующую знаменателю D_2 (рис. 4.24,д). Теперь остаётся подключить в соответствии с третьим шагом алгоритма нулор таким образом, чтобы определитель полученной схемы соответствовал знаменателю N . На рис. 4.24,е показан один из возможных способов включения нуллора. Проведя формальную замену норатора на источник эдс и нуллатора на ветвь отклика по напряжению, мы получим оптимальное решение задачи схемной реализации функции (4.38). Аналогичный результат дает применение метода компонентных уравнений [224].

Подчеркнём, что полученное решение является оптимальным, но не единственно возможным. Так, если не стоит задача получения только технологичных решений, то с помощью программы InterSyn может быть получено множество из двух десятков эквивалентных схем, с одинаковым количеством элементов, инвариантных относительно заданной полиномиальной функции (4.38). Некоторые из них представлены на рис. 4.24,ж–и. Очевидно, что если при выполнении алгоритма следовать рекомендации 2, то эти схемы в ходе наращивания должны были быть исключены.

4.8. Преобразование переключением активных элементов

Использование преобразований переноса активных элементов для синтеза. Задача разработки новых схем, традиционно решаемая в аналоговой области эвристическим путем или с использованием классических (рецептурных) методов синтеза, при использовании эквивалентных преобразований сводится к процедурно-алгоритмическим преобразованиям порождающей (исходной) схемы по известным и простым правилам [118].

Однако, методы топологического синтеза электрических цепей, основанные на преобразованиях структурных схем и схем замещения электрических цепей, приводят к получению лишь небольшого количества схем, инвариантных относительно схемной функции разрабатываемого устройства [118]. В то же время, применение преобразований, обеспечивающих получение большого числа эквивалентных структур приводят к изменению элементного базиса электрических схем, а, следовательно, и к изменению схемной функции. Кроме того, программная реализация методов синтеза основанных на преобразованиях электрических цепей связана со значительными трудностями в составлении алгоритмов.

Для получения полного множества структур, эквивалентных реализованной схеме по ССФ, в работе [132] предложено совместное использование преобразования переноса ветвей активных элементов и эквивалентных схемных упрощений [135]. Известные преобразования переноса источников эдс через узел и источников тока по контуру, которые являются следствием законов Кирхгофа, были дополнены правилами переноса источника эдс по контуру и источника тока через узел, и расширены на управляющие и управляемые ветви зависимых источников в теории преобразований М.А. Шакирова [286, 287]. Отметим, что правила переноса источника эдс по контуру и источника тока через узел предусматривает наличие соответственно внутренних сопротивлений и внутренних проводимостей у переносимых ветвей [286], что ограничивает их применение. Поэтому для получения полного множества схем, инвариантных по ССФ, применяются более общие преобразования переносом источника эдс (ветви управляющего тока) через сечение и источника тока (ветви управляющего напряжения) по контуру, которые приведены в табл. 4.5.

Здесь и далее E – может быть как независимым источником эдс, так и ИНУТ или ИНУН (строка 1, табл. 4.5), J – может быть как независимым источником тока, так и ИТУТ или ИТУН (строка 2, табл. 4.5), U – может быть как ветвью отклика выходного напряжения цепи, так и ветвью, управляющей напряжением ИНУН или ИТУН (строка 3, табл. 4.5), I –

может быть как ветвью отклика выходного тока цепи, так и ветвью, управляющей током ИНУТ или ИТУТ (строка 4, табл. 4.5) [132, 135].

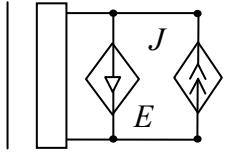
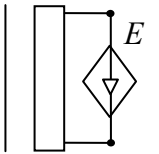
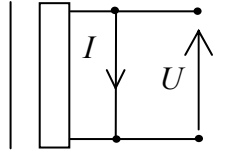
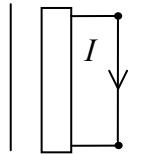
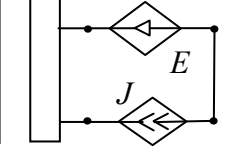
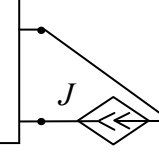
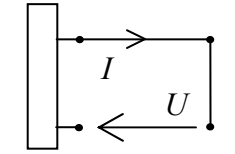
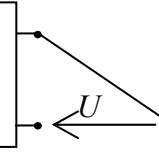
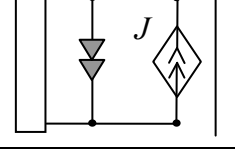
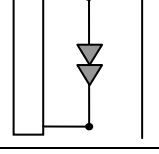
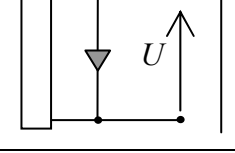
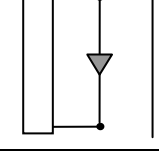
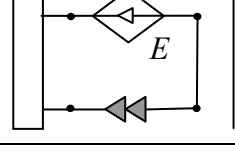
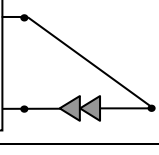
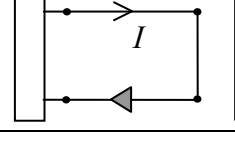
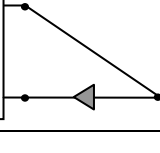
Таблица 4.5. Эквивалентные преобразования схем путем переноса управляющих и управляемых ветвей

№	Исходная схема	Эквивалентная схема
1	Перенос источника напряжения через сечение	
2	Перенос источника тока по контуру	
3	Перенос ветви управляющего напряжения по контуру	
4	Перенос ветви управляющего тока через сечение	

В общем случае перенос источников и управляющих ветвей приводит к увеличению числа элементов в схеме на $n-1$ ветвей, где n – количество ветвей инцидентных контуру, по которому переносится источник тока либо ветвь управляющего напряжения, или сечению, через которое переносится источник напряжения или ветвь управляющего тока.

Необходимым условием инвариантности к символьному определителю является сохранение числа элементов в схеме. Выполнение данного условия становится возможным, если некоторые из вновь образованных источников или управляющих ветвей окажутся нейтрализованными [132, 141]. Нейтрализация влечет за собой стягивание источников напряжения и управляющих ветвей тока, а также удаление источников тока и управляющих ветвей напряжения. Это достигается применением эквивалентных упрощений из МСО [135] (табл. 4.6).

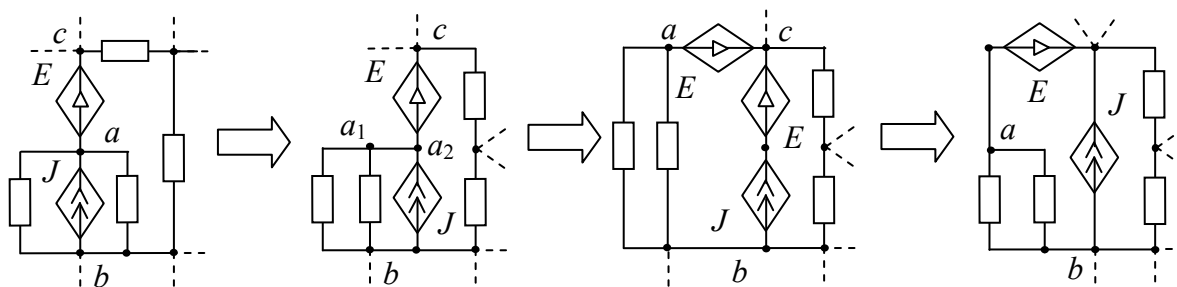
Таблица 4.6. Эквивалентные упрощения схем в результате нейтрализации элементов

№	Исходная схема	Эквивалентная схема
1	Параллельное соединение источника тока с источником напряжения	
		
2	Параллельное соединение ветви, управляющей током с ветвью, управляющей напряжением	
		
3	Последовательное соединение источника напряжения с источником тока	
		
4	Последовательное соединение ветви управляющего тока с ветвью управляющего напряжения	
		
5	Параллельное соединение источника напряжения с норатором	
		
6	Параллельное соединение ветви управляющего напряжения с нулатором	
		
7	Последовательное соединение источника напряжения с норатором	
		
8	Последовательное соединение ветви управляющего тока с нулатором	
		

Предлагаемые преобразования переноса, при которых сохраняется количество элементов схемы, получили название переключения активных элементов. Эти преобразования, в отличие от простейших топологических преобразований, также инвариантных количеству элементов и предусматривающих перестановку последовательно соединенных элементов и групп элементов, могут приводить к существенному изменению структуры порождающей схемы при сохранении неизменной ССФ [132, 135, 137, 141].

Правила переключения активных элементов. Предлагаемые в [132, 135, 137, 141] преобразования выполняются согласно следующим правилам: 1) источник напряжения может быть перенесен через сечение из n ветвей, содержащее $n-2$ нораторов или источников тока, при этом норатор или источник тока оказывается в новой ветви (без источника напряжения); 2) ветвь управляющего тока может быть перенесена через сечение из n ветвей, содержащее $n-2$ нуллаторов или управляющих ветвей напряжения, при этом нуллатор или ветвь управляющего напряжения оказывается в новой ветви (без ветви управляющего тока); 3) источник тока может быть перенесен по контуру из n ветвей, содержащего $n-2$ нораторов или источников напряжения; 4) ветвь управляющего напряжения может быть перенесена по контуру из n ветвей, содержащему $n-2$ нуллаторов или управляющих ветвей тока.

В частных случаях, когда сечение охватывает один узел, использование первых двух правил упрощается и делается более наглядным. Примеры переноса источника напряжения через узел a , смежный с ветвью источника тока или норатора, показаны на рис. 4.25,а и рис. 4.25,б соответственно. Перенос ветви управляющего тока через узел a , смежный с ветвью управляющего напряжения или нуллатора, иллюстрируют рис. 4.25,в и рис. 4.25,г соответственно. При этом общий узел так должен быть расщеплен на два новых узла a_1 и a_2 , чтобы переносимая ветвь источника напряжения или управляющего тока была инцидентна одному из образованных узлов, а остальные элементы стали инцидентны другому (рис. 4.25,а–г).



а

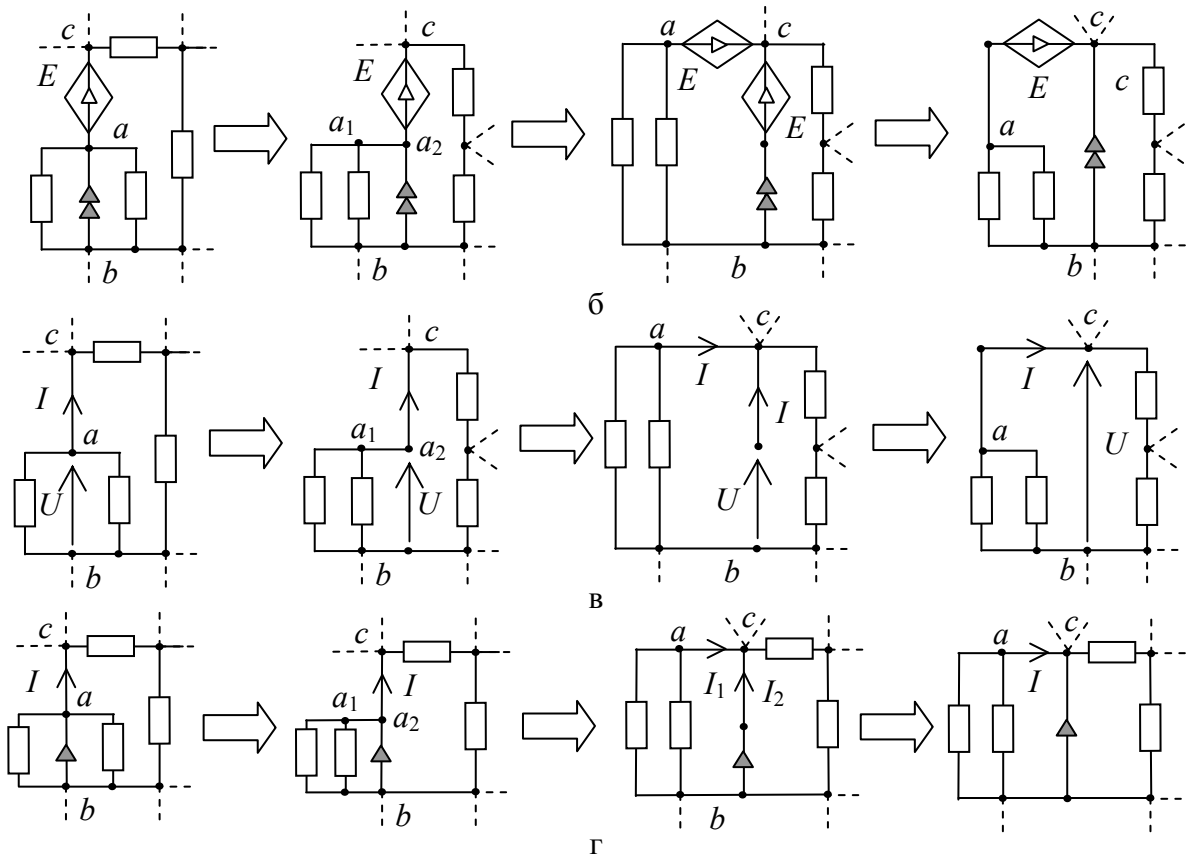
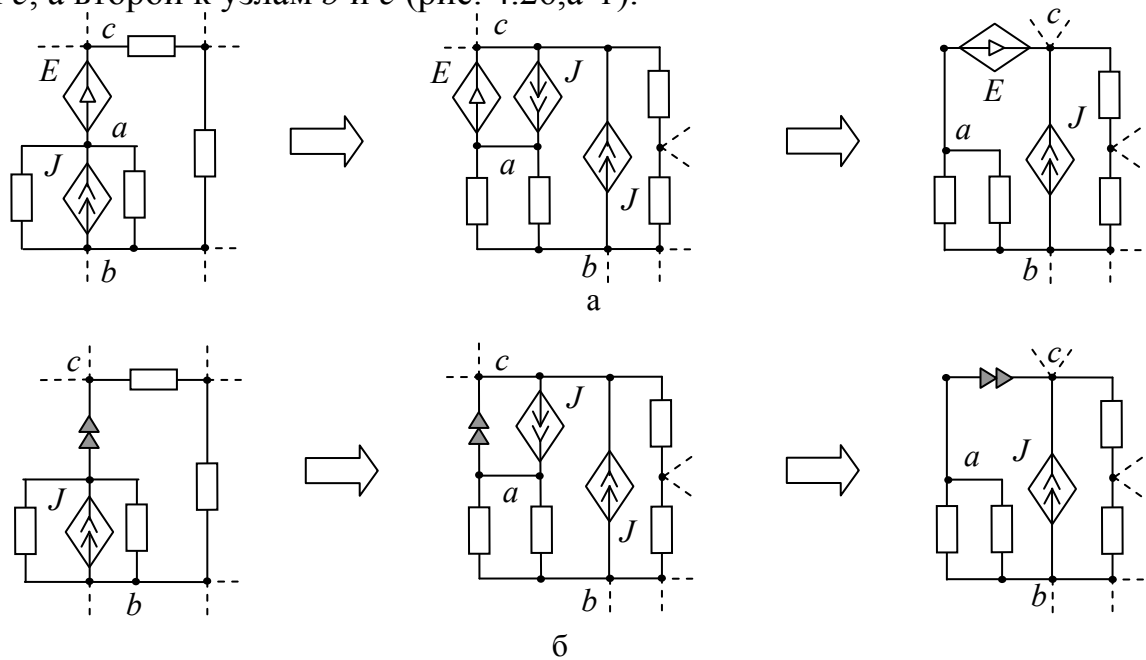


Рис. 4.25. Переключение ветвей активных элементов через узел

Примеры выполнения третьего и четвертого условия показаны на рис. 4.26,а–г. Переключение ветви источника тока (управляющего напряжения), смежной с узлами a и b , можно осуществить по любому контуру схемы, включающему в себя ветвь источника напряжения или норатора (управляющего тока или нуллатора) соответственно, соединенную с узлами a и c . Тогда один из порожденных элементов подключается к узлам a и c , а второй к узлам b и c (рис. 4.26,а–г).



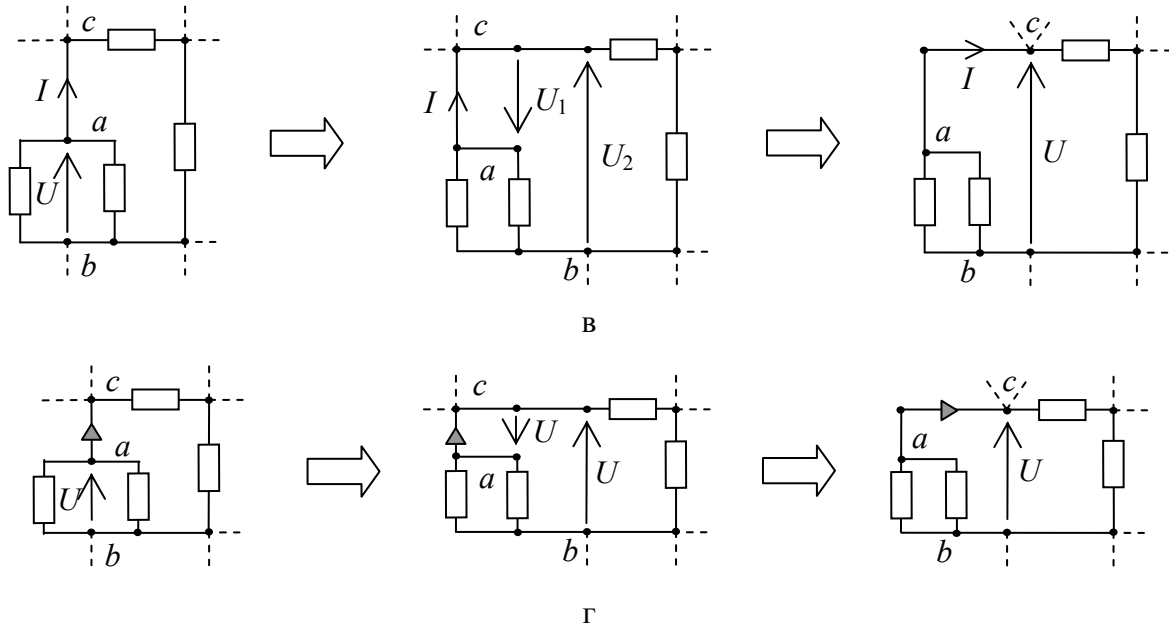


Рис. 4.26. Переключение ветвей активных элементов и по контуру

Как видно из рис. 4.26 и рис. 4.26, ветви источника тока и управляющего напряжения будут менять положение в преобразованной схеме по отношению к своему положению в порождающей схеме, а ветви источника напряжения и управляющего тока свое положение сохраняют. Отметим, что при переключении источников (управляющих ветвей) через сечения и контуры с нораторами (нуллаторами) элементы нуллора ведут себя подобно источникам (управляющим ветвям) УИ, дуальным по отношению к переключаемым ветвям.

Порождение эквивалентных электрических цепей, связанных преобразованием переключения. Предложенные эквивалентные преобразования, не изменяющие схемную функцию, позволяют получить полное множество эквивалентных схем на основе порождающей схемы-прототипа с использованием правил 1–4. Количество порожденных схем для активных электрических цепей с дуальными источниками и/или управляющими ветвями и схем на базе операционных усилителей может быть очень большим, поэтому преобразование переключением является эффективным инструментом схемотехнического проектирования [136].

Множество порожденных схем будет включать только неизоморфные структуры, в отличие от результатов, полученных с помощью переборных алгоритмов, требующих применения методик определения изоморфизма [131]. Все преобразованные структуры являются инвариантными относительно коэффициента преобразования, но другие их характеристики, например входное или выходное сопротивление, могут как совпадать со свойствами порождающей схемы, так и существенно от них отличаться. Выбор патентоспособных схемных решений обеспечивается путем сортировки и сравнительного анализа полного класса порожденных схем.

Существенно, что преобразования переключением позволяют направленно модифицировать структуру в соответствии с критериями технического задания и производства электронной аппаратуры [137], чтобы избежать необходимости анализа всех возможных схемных вариантов. Так, в практической схемотехнике одним из важнейших условий технологичности активных схем вследствие особенностей подключения питания является подключение управляемых источников к базисному узлу. Для получения патентоспособных схем требуется выполнять преобразования переключением относительно этого узла.

В работе [140] доказано, что преобразование переключением для неавтономной схемы сохраняет схемный определитель, а для автономной – ССФ. Выявлена связь преобразования переключением с входным и выходным сопротивлениями схемы [140]. Установлено свойство замкнутости предложенных преобразований [142].

Алгоритм преобразования схемы путем переключения ее активных элементов реализован в компьютерной программе Switcher (авторы: А.С. Петров, М.Ю. Разумков, О.А. Лагунков) [139].

Пример порождения схем, эквивалентных усилительному устройству. На рис. 4.27 представлена схема замещения операционного преобразователя [109, с.126], коэффициент передачи по напряжению которой задается, согласно методу схемных определителей, отношением $\Delta N/\Delta D$

$$\Delta N = pC_1(KU_2 pL BI_1 r_1 R_2 - r_2 R_1 (r_1 + R_2)). \quad (4.39)$$

$$\Delta D = BI_1 KU_2 r_1 R_2 + (r_1 + R_2)(pC_1(R_1(r_2 + pL)) + R_1 + r_2 + pL). \quad (4.40)$$

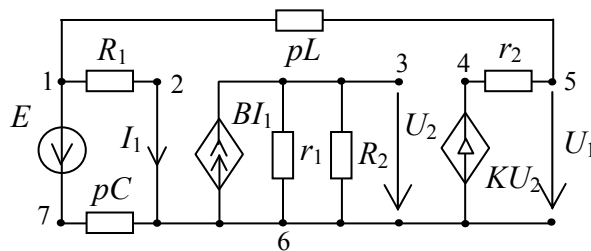


Рис. 4.27. Схема замещения операционного преобразователя [109, с.126]

Покажем, как с помощью эквивалентных преобразований переключением ветвей активных элементов можно получить схемы, инвариантные относительно заданной ССФ (4.39)–(4.40), не являющиеся при этом изоморфными к исходной структуре на рис. 4.27.

Рассмотрим применение преобразования переключением управляющих ветвей. Можно провести перенос ветви управляющего тока I_1 через узел «б». Для этого следует расщепить узел под номером «б», аналогично тому, как показано на рис. 4.25,б, на два новых: «б'» и «б''». При этом ветвь управляющего напряжения U_2 будет подключена к узлу

«б'», а элементы BI_1 , r_1 , R_2 , pC , KU_2 , U_1 к узлу «б''». В результате переноса I_1 через узел «б'» одна из порожденных управляющих ветвей будет включена между узлами «б'» и «б''», а вторая будет нейтрализована за счет последовательного соединения с U_2 , согласно строке 4 табл. 3. В итоге получаем схему на рис. 4.28,а, схемная функция которой соответствует выражениям (4.39)–(4.40).

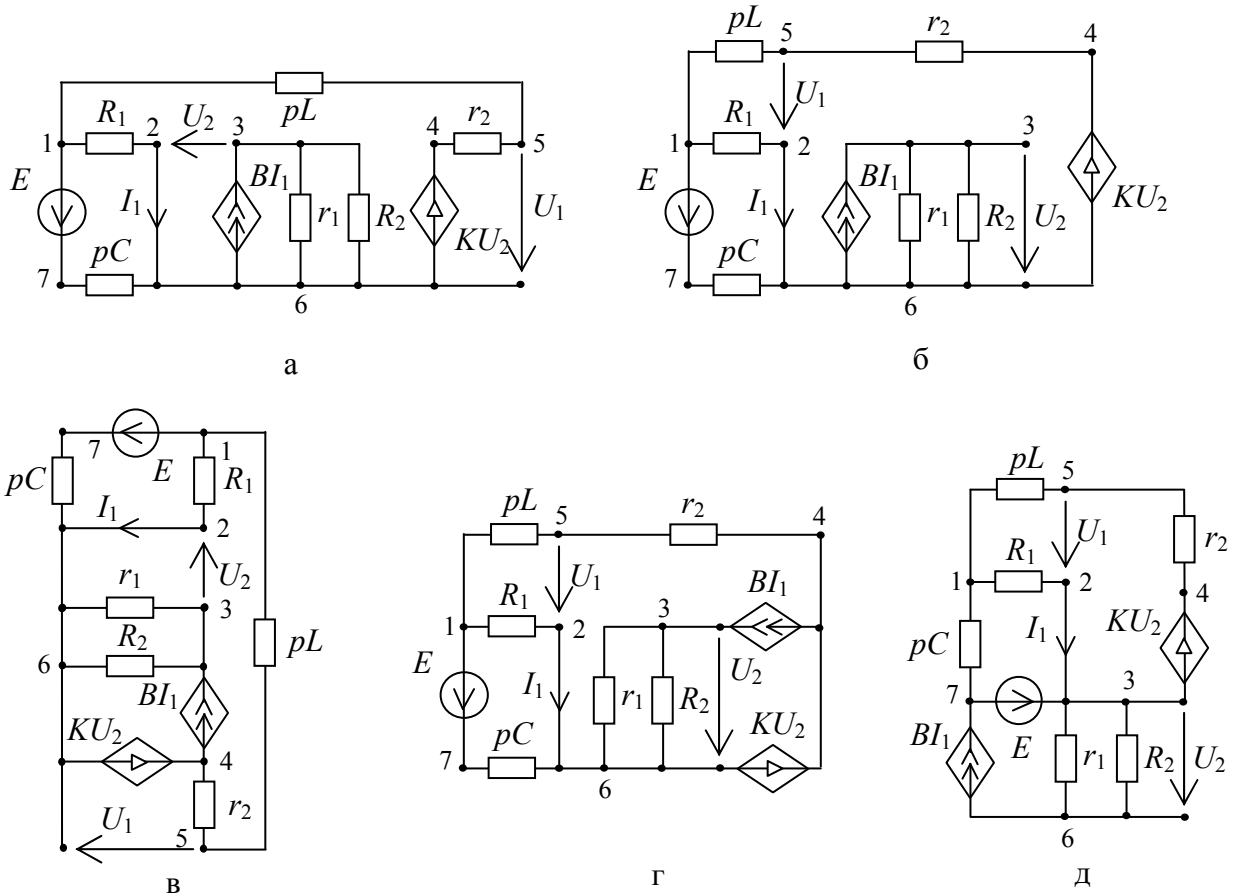


Рис. 4.28. Преобразование схемы переключением активных элементов

Такой же результат получается в дуальном случае переключения U_2 по контуру из узлов «2»–«3»–«б»–«2». Порождаемые управляющие ветви подключаются к узлам «2»–«3» и «2»–«б» соответственно. Параллельное соединение приемника напряжения U_2 с приемником тока согласно строке 2 табл. 4.6, приводит к его нейтрализации. Следовательно, переключение приемника U_2 также позволяет получить схему на рис. 4.28,а.

Существует еще один способ переключения управляющих ветвей для получения эквивалентной схемы. Для этого следует расщепить узел «б» таким образом, чтобы приемник U_1 был подключен к узлу «б'», а элементы BI_1 , r_1 , R_2 , pC , KU_2 , U_2 к узлу «б''». Теперь при переносе приемника I_1 через узел «б'», ветвь управляющего напряжения становится ветвью нейтрализации, что приводит к получению схемы на рис. 4.28,б. Можно провести переключение U_1 по контуру «2»–«5»–«б»–«2». Порождаемые

ветви подключаются к «2»–«5» и «2»–«6» соответственно, что также приводит к схеме на рис. 4.28,б.

Продолжим преобразование полученных схем путем переключения в них управляемых ветвей. Источник тока BI_1 в схеме на рис. 4.28,а можно перенести по контуру «3»–«4»–«6»–«3». При этом один из порожденных источников подключается между узлами «3»–«4», а второй источник будет соединен с узлами «4»–«6» параллельно ветви источника напряжения KU_2 , что приводит к его нейтрализации согласно строке 1 табл. 4.6. В результате получаем схему на рис. 4.28,в. Вместо переноса источника тока можно осуществить перенос KU_2 через узел «6», который предварительно необходимо расщепить. Один из порожденных источников подключается между узлами «6'» и «6''», а второй соединяется последовательно с ветвью BI_1 , которая становится согласно строке 3 табл. 4.6, ветвью нейтрализации, что приводит к получению схемы на рис. 4.28,в.

Если провести аналогичным образом переключение источника тока по контуру «3»–«4»–«6» в схеме на рис. 4.28,б, то получается схема, представленная на рис. 4.28,г, которая имеет ССФ, соответствующую выражениям (4.39)–(4.40).

Если в схеме на рис. 4.28,б переставить местами последовательно соединенные источник эдс и проводимость pC , то узел «6» становится общим для элементов E и BI_1 , а значит, появляется возможность переключения источника тока по контуру «3»–«6»–«7»–«3». При этом один из порожденных источников нейтрализуется вследствие параллельного соединения с ветвью E и в итоге схема приобретает вид, как показано на рис. 4.28,д. Аналогичный результат может быть получен в дуальном случае при переносе источника ЭДС через узел «6».

Всего с помощью предложенных преобразований возможно получить 12 неизоморфных схем, инвариантных относительно коэффициента передачи (4.39)–(4.40) усилительного устройства на рис. 4.27. Это подтверждается как результатами программы Switcher, так и экспериментами с программой SymSin.

4.9. Программные средства на основе схемного подхода

На момент подготовки монографии в печать в Отраслевом Фонде Алгоритмов и Программ (с 2009 года Отраслевой Фонд Электронных ресурсов Науки и Образования) из упомянутых выше были зарегистрировано 6 программных продуктов [101, 124, 128, 130, 138, 139]. Все разработанные программные продукты свободно распространяются через сеть Интернет [293].

Программа анализа и диагностики электрических цепей Symbolic Circuit Analysis, Diagnosis (SCAD). На МСО базируется наиболее

перспективная из существующих на сегодняшний день компьютерных систем схемотехнического моделирования использующих символьные методы анализа, – Symbolic Circuit Analysis, Diagnosis сокращенно SCAD [101]. Символьный блок этой программы – CIRSYMW используется в составе другой программы моделирования электронных цепей FASTMEAN (СПБГУТ) [294].

Система SCAD (разработчик графического интерфейса – Р.И. Березуев, рис. 4.29), первая версия, которой появилась в 2005 году, предназначена для автоматизированного формирования символьных выражений откликов и символьных выражений параметров элементов для электрических цепей в комплексной или операторной форме. Электрическая схема может содержать независимые источники напряжения и тока, сопротивления и проводимости, конденсаторы и катушки индуктивности, взаимоиндуктивности, источники напряжения и тока, управляемые напряжением и током, идеальные операционные усилители – нуллары. Вычислительная сложность формируемых выражений минимизируется для достижения некоторого оптимального числа операций и символов.

Входными данными для системы является графическое изображение схемы или текстовый файл *.cir в формате ASCII. Для получения изображения схемы программа оснащена графическим редактором, который записывает графическое изображение в виде файла *.dag и одновременно формирует текстовый файл. Последний может быть также получен любым известным текстовым редактором. Сформированные программой символьные выражения откликов и символьные выражения параметров представляются в виде символьных дробно-рациональных выражений, причем символьные выражения откликов содержат параметры элементов, а символьные выражения параметров – известные параметры элементов и измеренные токи и напряжения. Символьные выражения записываются программой в текстовый файл *.out. Программа SCAD.exe автоматизирует формирование cir-файла и вывод в окно программы файлов out и clc, а также отображает на схеме результаты clc-файла.

Символьные выражения откликов и параметров формируются программой в виде дробно-рациональных выражений, исследование которых проводится с помощью детально разработанных в математическом анализе методов. Рациональные выражения числителя и знаменателя символьных выражений откликов и символьных выражений параметров представляются в неканоническом свернутом виде, что позволяет получить компактные и экономичные по числу вычислительных операций формулы.

Предельная сложность исследуемых схем для процессора AMD Duron 1.1 ГГц составляет 150 узлов и 250 элементов, в том числе УИ

произвольного типа. Эти возможности программы подтверждены при исследовании электрических сетей и систем.

Система SCAD содержит в своем составе символьные процессоры CIRSMD, SECIRSYM, REDSYM и CIRTRE, реализованные В. В. Филаретовым на алгоритмическом языке Си. Предусматривается получение формул как в виде как единых, так и последовательных выражений. Программа CIRSMD (CIRSMDW) предназначена для генерации единых символьных выражений схемных функций, откликов, параметров элементов. Программы SECIRSYM, REDSYM и CIRTRE обеспечивают генерацию последовательных выражений, с операциями деления или без них, для внешних параметров подсхем. В комплекте поставляются два численных интерпретатора, позволяющих проводить численные расчеты по сформированным символьным выражениям: CALCSYM, написанный Д. В. Шеиным, и ASP (Arifmetic Symbolic Parser), разработанный С.А. Заболотновым.

Схемный редактор предусматривает создание многоуровневых схем (схема, ее подсхемы, подсхемы подсхем и т. д.) и включает в себя модуль «Графопостроитель», предназначенный для построения графиков зависимостей токов и напряжений в цепи от частоты. Программа обладает удобным интуитивным интерфейсом.

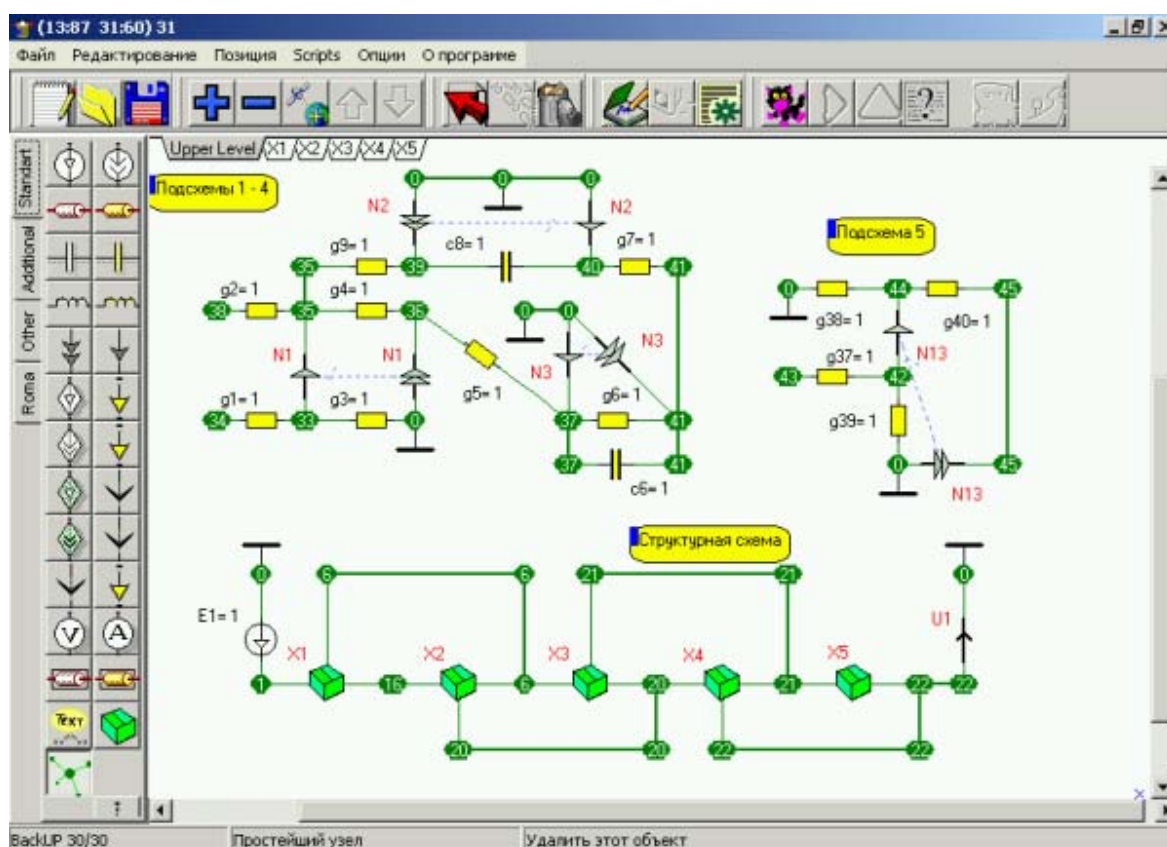


Рис. 4.29. Реализация средствами системы SCAD схемы активного фильтра [80]

Система SCAD может применяться в радиоэлектронике, электротехнике и энергетике при анализе и диагностике электронных цепей, энергетических сетей и систем, где требуется аналитическое и численно-аналитическое исследование функций откликов (параметров) и получение точных численных значений искомых величин в виде обыкновенных дробей.

Система работает на компьютерах класса IBM 586 под управлением ОС Windows 95/98/2000/XP, занимает места на диске около 4 Мб. Требуемый объем оперативной памяти для программы до 32 Мбайт.

Программа структурного синтеза SymSin. Развитие схемного подхода в синтезе электрических цепей, разработка метода восстановления схем на основе их определителей, позволило расширить функциональные возможности системы SCAD. В течение 2006–2009 годов разрабатывались модули SymSinW (рис. 4.30) [124] и InterSyn [130] (рис. 4.31), предназначенные для структурного синтеза электрических цепей по их символьным и полиномиальным схемным функциям. В 2009 году модернизированная версия системы SCAD получила название Symbolic Circuit Analysis, Diagnosis and Synthesis (SCADS).

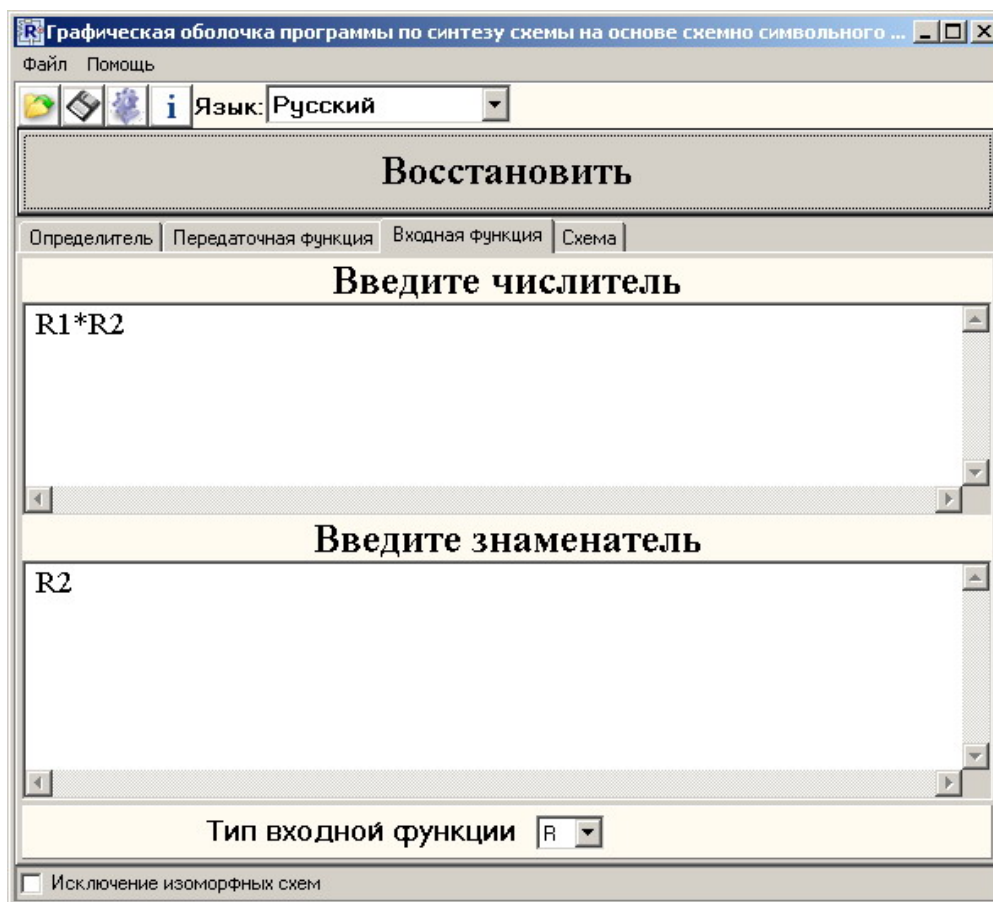


Рис. 4.30. Окно графической оболочки модуля SymSinW

Основные возможности модуля SymSinW: восстановление схем по заданному схемному определителю; восстановление схем по заданной передаточной характеристике; восстановление схем по заданной входной характеристике; восстановление схем по заданной схеме с эквивалентными передаточными характеристиками или схемным определителем. Кроме того, программа предоставляет возможность определения и исключения изоморфных схем.

Для работы программы на компьютерах класса IBM PC необходимыми условиями являются: процессор с тактовой частотой 1.8 ГГц; 8Мб свободного места на жестком диске; 128 Мб оперативной памяти; ОС Windows 98/2000/Me/XP.

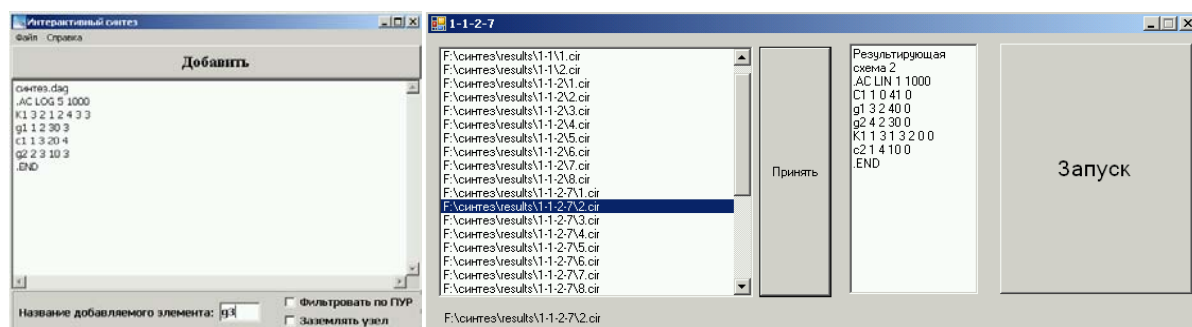


Рис. 4.31. Окно графической оболочки модуля InterSyn

Возможности программы InterSyn: получение полного множества схем, инвариантных к полиномиальной схемной функции. Исключение изоморфных структур и нетехнологичных схемных реализаций.

В настоящее время ведутся работы по оптимизации и развитию блока структурного синтеза системы SCADS.

Программа структурного синтеза Switcher. Программа Switcher [139] (рис. 4.32) используется для расширения класса эквивалентных схем, а также для структурной оптимизации электрических цепей в соответствии с критериями технического задания и производства электронной аппаратуры. Программа основана на применении метода эквивалентных преобразований электрических цепей переключением ветвей активных элементов. Входными данными для работы программы Switcher являются схемы замещения линейных электрических цепей в формате *cir*-файла.

Минимальные системные требования необходимые для работы программы: процессор с тактовой частотой 750 МГц, 64 Мб оперативной памяти, 1Мб свободного места на жестком диске, ОС Windows 98/2000/Me/XP, .NET Framework 2.0.

Синтезированные в результате работы программы Switcher схемы сохраняются в формате *cir*-файлов, которые пригодны для дальнейшего использования в программах схемотехнического моделирования.

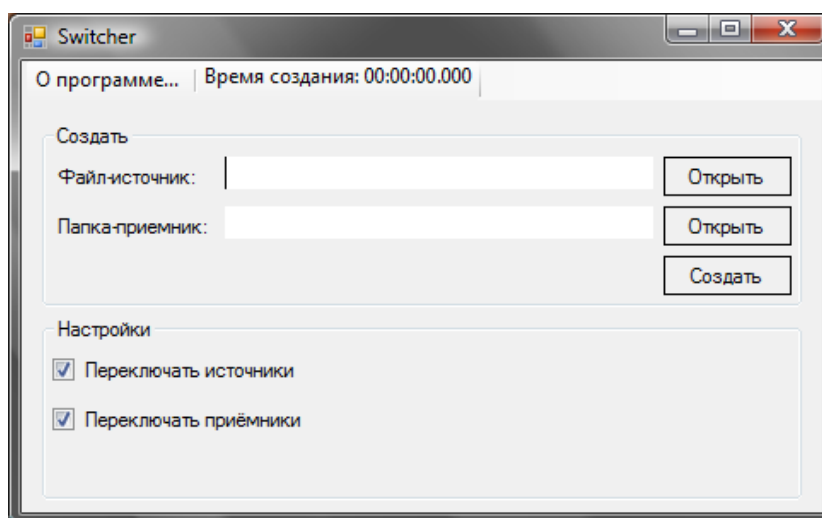


Рис. 4.32 Рабочее окно программы Switcher

Программа Switcher написана на языке программирования высокого уровня Delphi с использованием среды разработки Borland Delphi 7. Предусмотрена полная совместимость с системой схемотехнического моделирования SCAD.

Программа транскондуктивной реализации SchemeConverter. Программа SchemeConverter [128] предназначена для трансформации структурных схем усилительных устройств в схемы на транскондуктивных усилителях. Это позволяет реализовать удачные, но устаревшие схемы на новом технологическом уровне, предъявляя соответствующие требования к элементной базе. Используемый в программе метод реализации структурных схем обеспечивает сочетание конструкторско-технологических и структурных методов повышения точности электрических устройств [127].

Минимальные системные требования необходимые для работы программы: процессор с тактовой частотой 750 МГц, 64 Мб оперативной памяти, 8Мб свободного места на жестком диске, ОС Windows XP. Входными данными для работы программы SchemeConverter является исходная структурная схема, построенная средствами интерфейса пользователя. Полученная в результате схема на транскондуктивных усилителях представляется в формате *cir*-файлом.

Программа SchemeConverter проста в освоении и обладает интуитивным и дружелюбным к пользователю интерфейсом (рис. 4.33). Предусмотрена возможность сохранения структурной схемы, реализованной средствами программы в графическом BMP-формате.

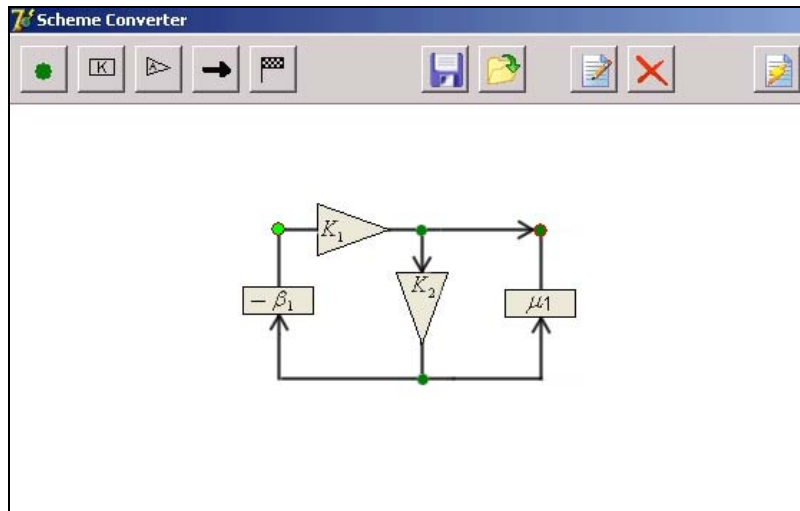


Рис. 4.33. Реализация структурной схемы усилителя [128] с аддитивной коррекцией средствами программы SchemeConverter

Программа SchemeConverter написана на языке программирования высокого уровня Delphi с использованием среды разработки Borland Delphi 7. Предусмотрена полная совместимость с системой SCAD.

Программа допускового анализа Toleralize. Программа Toleralize [138] используется для получения аналитических выражений, позволяющих определить допуски на параметры элементов для заданной погрешности коэффициента преобразования электронного (электротехнического) устройства без натурального эксперимента. Электрическая, или электронная, схема может быть задана в виде *cir*-файла.

Интерфейс программы Toleralize. В центре экрана отображается таблица с параметрами элементов цепи:

Элемент	Узел1	Узел2	Узел3	Узел4	Параметр
E1	0	2			1
E2	0	1			1
N1	0	5	0	4	
N2	0	6	0	3	
R1	2	3			1000
R2	5	3			14100
R3	3	6			100000
R4	1	4			10000
R5	4	5			10000
U1	6	0			

Выводные данные:

- Z1: 0
- Z2: $-R3 \cdot R2 \cdot R4$
- Z3: $R2 \cdot R4$
- Z4: 0

Полученные формулы:

- Дробная ССФ 1: $S = 0 / (R2 \cdot R4 \cdot (R1 + R3 \cdot R2 \cdot R4) / (0)) / (R1 + 0 / (R2 \cdot R4))$
- Дробная ССФ 2: $S = -R3 \cdot R2 \cdot R4 / (0) \cdot (1 + R1 \cdot 0 / (-R3 \cdot R2 \cdot R4)) / (1 + R1 \cdot R2 \cdot R4 / (0))$
- Мультипликативная погрешность: $Y = R1 \cdot (0 \cdot 0 - R3 \cdot R2 \cdot R4 \cdot R2 \cdot R4) / (R1 \cdot R3 \cdot R2 \cdot R4 \cdot R2 \cdot R4 + R3 \cdot R2 \cdot R4 \cdot 0)$
- Допуск: $Xi = R1 \cdot (0 \cdot 0 - R3 \cdot R2 \cdot R4 \cdot R2 \cdot R4) / (R1 \cdot R3 \cdot R2 \cdot R4 \cdot R2 \cdot R4 + R3 \cdot R2 \cdot R4 \cdot 0) \cdot R3 \cdot R2 \cdot R4 \cdot 0 / (0 \cdot 0 - R3 \cdot R2 \cdot R4 \cdot R2 \cdot R4 \cdot (R1 \cdot (0 \cdot 0 - R3 \cdot R2 \cdot R4 \cdot R2 \cdot R4) / (R1 \cdot R3 \cdot R2 \cdot R4 \cdot R2 \cdot R4 + R3 \cdot R2 \cdot R4 \cdot 0) + 1))$

Рис. 4.34. Интерфейс программы Toleralize

Минимальные системные требования необходимые для работы программы: процессор с тактовой частотой 750 МГц, 64 Мб оперативной памяти, 1Мб свободного места на жестком диске, ОС Windows 98/2000/Me/XP.

Программный продукт Toleralize обладает удобным и простым в освоении графическим интерфейсом (рис. 4.34). Содержимое открытого *cir*-файла отображается в рабочем окне программы. Пользователь имеет возможность выбрать произвольный элемент схемы, относительно которого требуется получить значение допуска и оценить его влияние на мультипликативную погрешность. Результаты работы программы выводятся на экран в рабочем окне. Полученные формулы могут быть использованы для аналитических исследований, а также могут быть рассчитаны с помощью численного интерпретатора ASP (Arifmetic Symbolic Parser), поставляющегося в комплекте с программой Toleralize.

Программа Toleralize написана на языке программирования высокого уровня Delphi с использованием среды разработки Borland Delphi 7. Предусмотрена полная совместимость с системой SCAD.

Таким образом, в четвертой главе было показано, что схемно-алгебраический аппарат МСО, доказавший свою эффективность в приложении к анализу сложных ЛЭЦ, может успешно применяться для решения многих других задач теории цепей.

Так, метод схемных определителей является эффективным инструментом для доказательства известных и разработки новых топологических преобразований. При этом справедливость того или иного преобразования устанавливается уже на схемном уровне, то есть до перехода к символьным выражениям схемных определителей. Разработаны эквивалентные преобразования переключением активных элементов ЛЭЦ на основе переноса ветвей УИ и эквивалентных схемных упрощений. Предложенные преобразования позволяют направленно модифицировать структуры ЛЭЦ в соответствии с критериями технического задания и производства. При этом обеспечивается структурная оптимизация ЛЭЦ, минуя перебор всех возможных схемных вариантов. Выявлена связь преобразования переключением с входным и выходным сопротивлениями схемы. Установлено свойство замкнутости предложенных преобразований.

В рамках МСО получил развитие диакоптический подход к анализу сложных ЛЭЦ. Разработаны эффективные методы иерархического деления схемы на две подсхемы и объединения подсхем, позволяющие преодолеть существующие ограничения на тип линейных элементов и число внешних узлов подсхем. Сомножители диакоптических формул не содержат дубликаций, поскольку являются минорами некоторой подсхемы и

находятся как определители производных схем, образованных в результате подсоединения нуллов к внешним узлам этой подсхемы.

Разработан метод нулловых схем для символьного анализа электронных цепей с любыми типами линейных элементов по частям через объединение подсхем. Метод нулловых схем выгодно отличается от метода двоичных векторов или схемных миноров идентичностью этапов анализа подсхем и их объединения за счет исключения алгебраической процедуры нахождения знака слагаемых в диакоптических формулах.

Исследования в области символьно-топологического анализа позволили дополнить традиционный явный принцип наложения новым, неявным принципом. Неявный принцип наложения заключается в замене всех независимых источников на компенсирующие элементы – источники, которые управляются ветвью единственного опорного источника. При этом в результате объединения соответствующим образом подключенных источников образуется многомерный управляемый источник.

Схемный подход успешно используется для получения символьного решения базисной задачи диагностики, на основе принципа компенсации. Используется компенсация элементов с неизвестными параметрами с помощью компенсационной схемы или компенсатора, состоящего из источника напряжения или тока с известным (измеренным) параметром и нуллора. Схема, полученная в результате замены компенсаторами всех элементов с неизвестными параметрами, называется схемой с компенсированными элементами. Эта схема эквивалентна исходной схеме и в отличие от нее может быть проанализирована МСО.

Новым и перспективным направлением является реализация структурных схем на усилителях транскондуктивных усилителях. Важно, что процедура перехода от структурной схемы к схеме на транскондукторах весьма проста и полностью формализована. В то же время переход от структурных схем к схемам на ОУ является эвристической процедурой и требует значительного опыта проектировщика.

На основе формул выделения параметров двухполюсников (1.1)–(1.2) и УИ (3.7), которые использовались ранее только для анализа и диагностики ЛЭЦ, разработаны алгоритмы реализации схем по символьным и полиномиальным схемным функциям, реализованные в программах SymSin и InterSyn.

На МСО базируется наиболее перспективная из существующих на сегодняшний день систем схемотехнического моделирования, основанных на символьных методах анализа ЛЭЦ, – *Symbolic Circuit Analysis Diagnosis and Synthesis* сокращенно *SCADS*. Символьный блок этой программы – *CIRSYMW* используется в составе другой программы моделирования электронных цепей *FASTMEAN* (СПБГУТ).

Заключение

В результате проведенного историографического исследования установлено:

1. После защиты докторской диссертации, выполненной под руководством Кирхгофа, молодой ученый Вильгельм Фойснер увлекся неэлектротехническими проблемами благодаря своему второму учителю – Герлингу. На склоне лет Фойснер смог вернуться к урокам своего первого учителя и довести его результаты в области символьного анализа цепей до совершенства. Его имя может быть поставлено в один ряд с именами Кирхгофа и Максвелла, общепризнанных классиков, заложивших основы теории электрических цепей.

2. Значительное отставание в развитии символьных методов анализа электронных цепей является следствием недооценки специалистами результатов Фойснера. Преимущественное развитие получили методы, использующие промежуточные модели в виде избыточных матричных, графовых и теоретико-множественных представлений.

3. Схемный подход Фойснера и ориентированный нуллок Брауна, обобщающий идеальный усилитель Теллегена, были положены в основу метода схемных определителей. К разработке подобного метода были близки Сикет и Партен (метод остаточных схем), а также Хашемян (формула разложения по параметрам управляемых источников).

4. Трудоемкость восприятия метода схемных определителей, который студент нередко усваивает лучше профессора, во многом обусловлены тем, что результаты, полученные Озавой и Миликом по фундаментальным свойствам электрических цепей – разрешимости и вырождению, до сих пор не используются в учебных курсах.

5. Метод схемных определителей стал эффективным инструментом для решения различных задач теории цепей: символьного анализа, диакоптики, диагностики, структурного синтеза, допускового анализа и аналитического решения линейных алгебраических уравнений. Полученные результаты положены в основу генерации оптимальных символьных выражений (схемных функций, откликов, параметров элементов, погрешностей преобразования, допусков) и патентоспособных схем.

Бережное отношение к работам научных предшественников – это залог успеха предстоящих исследований. К сожалению, Фойснер, работы которого привели к масштабным исследованиям в России, неизвестен у себя на родине как электротехник. Полемизируя с Гавриилом Романовичем Державиным, выразим надежду, что в наших силах содействовать тому, чтобы «река времён в своём стремленьи» не уносила прочь научные работы предшественников. Чтобы их «не пожрало жерло вечности», и новые поколения исследователей не повторяли, а развивали результаты своих коллег.

Именной указатель

- Ahrens W. – 20
 Alderson G. E. – 18
 Barrows J.T. – 33–34
 Bode H. W. – 87
 Boesch F.T. – 18
 Braun J.– 42-44, 51, 63, 67, 102
 Breuer M.A. – 54
 Chang S.M. – 46-47, 49, 102
 Chen W. K. – 18
 Clarke L.E. – 22
 Coates C.L. – 31-32, 34-37, 64-65
 Colbourn C.J. – 18
 Day R.P.J. – 18
 Davies A.G. – 42-43, 51
 Dmytryshyn R. – 75
 Hashemian R. – 51-53, 64-65, 102
 Hassoun M.M. – 59
 Hoang S. – 26, 32-34
 Gauss K.F. – 14, 38-39
 Gehrcke E.– 15
 Gerling C.L. – 12, 14, 15, 163
 Feussner W. – 7-9, 12-26, 28, 30, 32, 39-42, 44, 47-51, 53, 57, 58, 63, 71, 75, 102, 112, 117, 124, 135, 163
 Fleming J.A. – 23
 Kirchhoff G. R. – 8-9, 12, 20-22, 24, 26, 29-31, 43, 50, 54, 76, 163
 Knuth D.E. – 17
 Konczykowska A. – 73-74
 Kron G. – 18
 Laplace P.-S. – 73, 76, 100, 119-120, 126
 Lengli S.P.– 13
 Lin P.M. – 25, 36-37, 51, 59
 Mason S.J. – 25-26, 35
 Maxwell J. C. – 8-9, 20-21, 23-24, 26, 30, 54, 163
 Milancej T. – 53
 Milic M.M. – 44-45, 50, 63, 163
 Minty G. J. – 18
 Nel L.D. – 18
 Ozawa T. – 44-45, 50, 63, 163
 Parten M.E. – 50-51, 53, 63, 102, 163
 Percival W.S. – 25, 30
 Robisho L. – 25
 Schulze F.A.– 13, 16
 Seacat R.H. – 49, 50-51, 53, 63, 102
 Shannon C. E. – 25
 Starzyk J. – 74
 Svanberg O. – 13
 Tellegen B.D.H. – 41-42, 103, 163
 Thomas P. – 9, 15
 Wang R.T.P. – 26, 34
 Wheatstone C. – 13, 21, 24, 61
 Wierzba G. M. – 102
 Winkelmann A.– 15
 Wozniacki H. – 31-34
 Анисимов В.И. – 36
 Березуев Р.И. – 155
 Бондаренко А.В. – 43
 Волгин Л.И. – 76, 104
 Гальперин И.И. – 25
 Галямичев Ю.П. – 32-37, 40
 Горшков К.С. – 9, 75, 131
 Дмитришин Р.В. – 37
 Калниболотский Ю.М. – 35-36
 Козьмин – 36
 Королев Ф.А. – 75, 120
 Крамер – 133-134
 Курганов Д.С. – 75, 83
 Курганов С.А. – 75, 122
 Лаксберг Э.А. – 37
 Ломоносов М.В. – 7
 Миронов В.Г. – 26
 Сигорский В.П. – 35, 49
 Токарев Ю.В. – 75, 137
 Филаретов В.В. – 9, 43, 53, 63, 120, 156
 Шакиров М.А. – 37, 147
 Шеин Д.В. – 60, 73, 156

Предметный указатель

- Анализ**
 символьный 6,
 допусков на параметры элементов 92
- Восстановление схемы** 135
 по определителю 135
 по символьной схемной функции 136
- Выделение параметра** 16
 нуллора 65
 многополюсника 111
 резистора, 16
 УИ 64
- Выражение**
 алгебраическое 54
 схемно-алгебраическое 17
- Вырождение схемы** 44
- Граф** 17
 Коутса (граф матрицы) 31
 Мейсона 25
 сигнальный 25
- Двоичный вектор** 112
- Диакоптика** 40, 47, 62, 85, 111
- Диагностика электрических цепей** 122
- Дубликации** 27, 72, 111
- Компенсация косвенная** 122
- Коэффициент полиномиальный** 35
- Матрицы** 16
- Метод схемных определителей** 50, 63
- Минор схемный** 112
- Мостовая цепь** 13
- Нейтрализация элементов** 37
- Неудаляемый**
 управляемый источник 63
 элемент матрицы 130
- Нуллы** 42
 направленный взвешенный 42
 направленный нумерованный 42, 63
- Объединение подсхем** 114
- Определитель**
 схемы 16
 знаменателя 16
 числителя 17
 простейшей 50
- Полюсы подсхемы** 118
- Погрешность преобразования** 92
- Преобразование**
 топологическое, 102
 дополняющее, 102
 дуальное, 102
 инверсное, 102
 комплементарное, 102
 реверсивное, 104
 инверсией пути
 от истока до стока графа, 102
 поворотом активного
 трехполюсника, 102
 эквивалентное, 37
- Программы**
 CIRTRE, 120
 CIRSWM32, 83
 InterSyn, 142
 Mathematica, 54
 SCAD, 83, 155
 SchemeConverter, 135
 SYMSIN, 137, 157
 Toleralize, 93, 160
 SAPWIN, 86
 SYMBOL, 56
- Распределенный элемент** 99
- Синтез электрических цепей**
 структурный, 135
 по полиномиальным схемным функциям 138
- Структурные числа** 26
- Схема**
 базисная, 119
 замещения, 20
 нулловая, 81
 структурная, 103, 131
 тестовая 21
 активного полосового
 фильтра, 73
 простейшая 50,
- Схемное отображение**
 матриц, 133
 систем уравнений, 133
- Схемная функция**
 символьная, 6
 полиномиальная, 144
- Упрощение эквивалентное** 38
- Электрическая цепь**, 6

Библиографический список

1. Ahrens W. Ueber das Gleichungssystem einer Kirchhoff'schen galvanischen Stromverzweigung // *Mathematische Annalen*.– Leipzig, 1897.– Bd 49.– S. 311–324.
2. Alderson G. E., Lin P.M. Computer generation of symbolic network functions – new theory and implementation // *IEEE Transactions on circuit theory*.– 1973. –Vol. CT–20, N1. – P. 48–56.
3. Barrows J.T. Extension of Feussner's method to active networks // *IRE Transactions on circuit theory*.– 1966.– Vol. CT–13, N 6.– P. 198–200.
4. Bode H. W. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. – Princeton (N.J.): Van Nostrand, 1945.– 577 p.
5. Boesch F.T., Li X., Suffel C. On the existence of uniformly optimally reliable networks // *Networks*. – 1991. – Vol. 21, N2. – P. 181–194.
6. Bondarenko A. V. Nullator-norator models for controlled voltage and current sources // *Telecommunication and Radio Engineering*.– 1974.–Vol. 28-29.– P. 126–128.
7. Bondarenko A. V. Synthesizing immittance matrices with nullors // *Izvestia vysshikh vehebnykh zavedenii energetika*.– 1977.– Vol. 2. P. 28–35. – Цит. по [60] на рус. яз.: Бондаренко А.В. Синтез иммитансных матриц с нуллорами // *Изв. высш. учебных заведений СССР. Энергетика*.
8. Braun J. Topological analysis of networks containing nullators and norators // *Electronics letters*.– 1965.– Vol. 2, No. 11.– P. 427–428.
9. Braun J. Method of singular elements in the theory of active nonreciprocal networks: Ph.D. dissertation / *Rozpravy Československé Akademie VĚD*.–Praha, 1969.– 60 p.
10. Braun J. *Kombinatorické metody v analýze a modelování elektronických soustav (Combinatorial Methods in Analysis and in Models of Electronics Systems)*.– Praha: Academia, 1990.
11. Breuer M.A. Generation of optimal code for expressions via factorization // *Communications of the Association for computing machinery*.– 1969.– Vol. 12, N 6.– P. 333–340.
12. Carlin H.J., Youla D.C. Network synthesis with negative resistors // *Proceedings of the IRE*.– 1961 (May).– P. 907–920.
13. Carlin H.J. Singular network elements // *IEEE Transactions on circuit theory*.– 1964 (March).– P. 67–72.
14. Chang S.M. Symbolic analog circuit analysis. Ph. D. dissertation. – Michigan State University. – 1992.
15. Chang, S. M., Wierzba G. M. Circuit level decomposition of networks with nullors for symbolic analysis // *IEEE Transactions on circuits and systems*. – 1994. – Vol. CAS-41. – P. 699–711.
16. Chen W. K. Unified theory on topological analysis of linear systems // *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*.– London, 1967.– Vol. 114, N11. – P. 1630.

17. Chen W. K. On generation of trees without duplications // Proceedings of the IEEE.– 1969.– Vol. 57, N7. P. 1292.
18. Chen W. K. Unified theory on generation of trees of a graph. Part 3. Decomposition and elementary transformations // International journal of electronics. – 1971.– Vol. 31, N4. – P. 301–319.
19. Clarke L.E. On Cayley's formula for counting trees //The journal of the London Mathematical Society. – 1958.– Vol. 33, part 4, N132.– P.471–474.
20. Coates C.L. General topological formulas for linear network functions // IRE Transactions on circuit theory.– 1958.– Vol. CT-5, N 3.– P. 42–54.
21. Colbourn C.J., Day R.P.J., Nel L.D. Unranking and ranking spanning-trees of a graph // Journal of algorithms.– 1989. – Vol. 10, N2.– P. 271–286.
22. Davies A.G. Topological solutions of network containing nullators and norators // Electronics letters. – 1966. – Vol. 2. – P. 90.
23. Dmytryshyn R., Kubaszek A. Sequence of expressions generation for the repetitive analysis acceleration // Symbolic Methods and Applications in Circuit Design (SMACD).– 1998.– P. 154–159.
24. Dmytryshyn R., Kubaszek A. Multimethodical approach and sequence of expressions generation for acceleration of repetitive analysis of analog circuits // Analog integrated circuits and signal processing.– Vol. 31.– Kluwer Academic Publishers, 2002.– P. 147–159.
25. Dmytryshyn R. Modified Feussner's method // 7th International Workshop on Symbolic Methods and Applications in Circuit Design (SMACD-2002).– Rumunia, Sinaia, 2002.– S. 47–52.
26. Echtenkamp J.A., Hassoun M.M., Prabhu G.M., Wright C.T. Hierarchical sensitivity analysis for sequence of expressions method // ECCTD.– 1995.– P. 75–78.
27. Feussner W. Ueber den Bumerang // Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beforderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. – Marburg, 1869. – N 1 (Januar).– S. 7–15.
28. Feussner W. Ueber die von Hrn. Sekulic beschriebene Interferenzerscheinung // Annalen der Physik und Chemie. – 1873. – Bd 9, N 8. – S. 561–564.
29. Feussner W. Neuer Beweis der Unrichtigkeit der Emissionstheorie des Lichts // Annalen der Physik und Chemie. – 1877. – Bd 10, N 2. – S. 317–332.
30. Feussner W. Ueber die Interferenzerscheinungen dünner Blättchen mit besonderer Reucksicht auf die Theorie der Newtonschen Ringe // Annalen der Physik und Chemie. – 1881. – Bd 14, N 12. – S. 545–571.
31. Feussner W. Ueber Verzweigung elektrischer Strome // Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beforderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. – Marburg, 1902. – N8 (December).– S. 105–115.
32. Feussner W. Ueber Stromverzweigung in netzformigen Leitern // Annalen der Physik. – 1902. – Bd 9, N 13. – S. 1304–1329.
33. Feussner W. Ueber ein Verfahren zur Dickenbestimmung keilförmigen Schichten durch Interferenzstreifen // Sitzungsberichte der Gesellschaft zur

Beforderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg.– Marburg, 1903.– S. 76–80.

34. Feussner W. Einige Satze zur Berechnung der Stromstarke in netzformigen Leitern // Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beforderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg.– Marburg, 1904.– N 7 (August).– S. 83–87.

35. Feussner W. Ueber zwei Sätze der Elektrostatik (betr. Die potentielle Energie eines Leitersystems). – Festschrift L. Boltzmann gewidmet. – Leipzig, 1904.– S. 537–541.

36. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstarke in netzformigen Leitern // Annalen der Physik. – 1904. – Bd 15, N 12. – S. 385–394.

37. Feussner W. Ueber einen Interferenzapparat und einer damit von Herrn Dr. Schmitt ausgeführte untersuchung // Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beforderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg.– Marburg, 1907.– S. 128–134.

38. Feussner W. Die Haidingerschen Ringe und ihre Anwendung zur Preufung planparalleler Platten // Festschrift ... der Wetterauischen Gesellschaft für die gesamte Naturkunde.–Hanau (Clauss&Feldersen).–1908.–S. 53–68, 149.

39. Filaretov V.V. Improved decoding method for electrical network analysis // Electrical technology.– 1996.– N 4.– P. 41–53.

40. Filaretov V.V. A topological analysis of electronic circuits by a parameter extraction method // Electrical technology.– 1998.– N2.– P. 46–61.

41. Filaretov V.V., Korotkov A.S. Extension of Feussner's method to general active networks // Direct topological models for active networks: Synthesis and analysis: Proceedings of international conference «Continual algebraic logic, calculus and neuralinformatics in science, technics and economics» (CLIN–2003).– Ulyanovsk: ULSTU, 2003.– P. 95–101.

42. Filaretov V.V., Korotkov A.S. Generalized parameter extraction method in network symbolic analysis // Proceedings of the European conference on circuit theory and design (ECCTD–2003).– Kraków, Poland, 2003.– Vol. 2.– P. 406–409.

43. Filaretov V.V., Korotkov A.S. Generalized parameter extraction method in case of multiple excitation // Proceedings of the 8–th international workshop on Symbolic Methods and Applications in Circuit Design.–Wroclaw (September 23–24).–2004.–P. 8–11.

44. Filaretov V.V., Gorshkov K.S. Friedrich Wilhelm Feussner und die Methode der Schemadeterminanten // Synthesis, analysis and diagnosis of electronic circuits: Proceedings of international conference CLIN–2007. – Ulyanovsk: ULSTU, 2007. – T. 3.– P. 207–222.

45. Filaretov V., Gorshkov K. Transconductance Realization of Block-diagrams of Electronic Networks // Proc. of International Conference on Signals and Electronic Systems (ICSES'08). – Krakow, Poland. – 2008. – P. 261–264.

46. Filaretov V.V., Gorshkov K.S. A method of realization of block-diagrams of electronic networks based on transconductance amplifiers //

Synthesis, analysis and diagnosis of electronic circuits: The international transactions / Under edition of V.V. Filaretov. – Ulyanovsk: USTU, 2008. – P. 265–273.

47. Fleming J.A. Phil. Mag. – 1885.– (5) N20.– P. 221.

48. Gehrcke E. Handbuch der physikalischen Optik. – Iter Band, lte Halfte, und 2ter Band, lte Halfte. Leipzig, Barth, 1926–1927. – 470 p.

49. Hashemian R. A computational algorithm for direct evaluation of network transfer function // Comput. Aided Des.– Sept. 1976.

50. Hashemian R. Symbolic representation of network transfer functions using norator-nullator pairs // Electronic circuits and systems.– 1977.– Vol. 1, No. 6 (November).– P. 193–197.

51. Hassoun M.M., Lin P.M. A hierarchical network approach to symbolic analysis of large-scale networks // IEEE Transactions on circuits and systems – 1: Fundamental theory and applications.– 1995.– Vol. 42, N 4.– P. 201–211.

52. Hoang S. Direct topological rules for analysis of networks without magnetic coupling // Archiwum elektrotechniki.– 1974.– T. 23, z. 2.– S. 387–405.

53. Hoang S. Direct and shortcut topological rules for analysis of networks with magnetic coupling // Archiwum elektrotechniki.– 1974.– T. 23, z. 2.– S. 407–425.

54. Hoang S. Regular cycle sets and transfer link chains in the direct topological method of network analysis // Archiwum elektrotechniki.– 1974.– T. 23, z. 4.– S. 1069–1082.

55. Hoang S. Direct topological method of analysis of networks containing operational amplifiers // Archiwum elektrotechniki.– 1981.–T.30,z.118–4.–S. 911–922.

56. Hoang S. About the stability of frequency-independent networks // IEEE Transactions on circuits and systems.– 1985.– Vol. CAS–32, N 9.– P. 970–973.

57. Jungnickel C., McCormach R. Intellectual mastery of nature. Theoretical Physics from Ohm to Einstein (Vol.2): The Now Mighty Theoretical Physics 1870–1925. – Chicago and London: The University of Chicago Press, 1986.

58. Kirchhoff G. R. Ueber die Auflelösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Streome gefeuert wird // Annalen der Physik.– 1847.– Bd. 72.– S. 498–508.

59. Knuth D.E. The art of computer programming (Pre-fascicle 4). A draft of section 7.2.1.6: Generating all trees.– Addison-Wesley, Stanford University. – 2004.– Vol. 4. – 81 p.

60. Kumar P., Senani R. Bibliography on nullors and their applications in circuit analysis, synthesis and design // Analog integrated circuits and signal processing.– 2002.– Vol. 33.– P. 65–76.

61. Lin P.M. Symbolic network analysis. – Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo: Elsevier, 1991.– 319 p.

62. Mason S.J. Topological analysis of linear non-reciprocal networks // Proceeding of the IRE.– 1957.– Vol. 45, N6.– P. 829–838.
63. Middlebrook R. D. Null double injection and the extra element theorem // IEEE Transactions on Education.–1989.– Vol.32, N3.– P.167–180.
64. Middlebrook R. D., Lindal J., Vorperian V. The N Extra Element Theorem.– IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications.– 1998.– Vol. 45, N 9.– P. 919–935.
65. Milic M.M. Explicit formulation of the state equations for a class of degenerate linear networks // Proc. Inst. Elec. Eng. (London). – 1971. – Vol. 118.– P. 742–475.
66. Milic M.M. General passive networks – solvability, degeneracies, and order of complexity // IEEE Transactions on circuits and systems.– 1974.– Vol. CAS–21, No. 2 (March).– P. 177–183.
67. Minty G. J. A simple algorithm for listing all trees of a graph // IEEE Transactions on circuit theory.– 1965.– Vol. CT–12, N1.–P. 120.
68. Minty G. J. On axiomatic foundations of theories of directed linear graphs electrical networks and network-programming // Journal of mathematics and mechanics.– 1966.– Vol. 15, N3. –
69. Muir T. The theory of determinants in the historical order of development. Part I and II – General and special determinants up to 1841. – London: MacMillan and Co, 1906. – 503 p.
70. Ozawa T. Topological conditions for the solvability of linear active networks // Circuit Theory and Applications.– 1976.– Vol. 4.– P. 125–136.
71. Parten M.E. Seacat R.H. Topological analysis of networks containing nullators and norators using residual networks // 23rd annual Southwestern IEEE conference and exhibition.– New York, USA, 1971.– P. 39–42.
72. Parten M.E., Seacat R.H. Analysis of active networks by nullator-norator residual networks // Proc. of 6th Asilomar conference on circuits and systems.– 1972.– P. 522–525.
73. Percival W.S. The solution of passive electrical networks by means of mathematical trees // Proceeding of the IEE.– 1953.– Vol. 100, pt. 3, N65.– P. 143–150.
74. Percival W.S. Improved matrix and determinant methods for solving networks // Digests of institution monographs.– 1954.– Monograph No. 96 (Radio section).– P. 278–279.
75. Percival W.S. The graphs of active networks // Digests of institution monographs.– Monograph No. 129 (Radio section).–1954.– P. 727–729.
76. Rodanski B. Computational Efficiency of Symbolic Sequential Formulae // 6th International Workshop on Symbolic Methods and Applications in Circuit Design (SMACD–2000).– 2000.– P. 45–50
77. Rodanski B. Modification of the two-graph method for symbolic analysis of circuits with non-admittance elements // Proc. of International Conference on Signals and Electronic Systems (ICSES'02). – Wroclaw–Swieradow Zdroj, 2002.– P. 249–254.

78. Seacat R.H. A method of network analysis using residual networks. Ph. D. Dissertation, Texas A & M Univ., College Station, Texas, 1963.
79. Schulze F.A. Wilhelm Feussner // *Physik Zeitschrift*.– 1930.– N31.– P. 513–514.
80. Schulze F.A. Friedrich Wilhelm Feussner // *Nature*.– 1930.– N126 (23 August 1930).– P. 286.
81. Starzyk J., Sliwa E. Upward topological analysis of large circuits using directed graph representation // *IEEE Transactions on circuits and systems*. – 1984. – N 4. – P. 410–414.
82. Starzyk J.A., Konczykowska A. Flowgraph analysis of large electronic networks // *Circuits and systems*.– 1986.– Vol. CAS-33, N 3.– P. 302-315.
83. Tellegen B.D.H. La recherche pour una sèrie complète d'èlèments de circuit ideaux non-linéaires // *Rendiconti del seminario matematico e fisico di Milano: Sotto gli auspice dell'università e del politecnico*.– Milano, 1955. Vol. 25 (1953–1954).– P. 134–144.
84. Tellegen B.D.H. The gyrator, a new electric network element // *Philips Research Reports*.– 1948.– Vol. 3, N 2.– P. 81–101.
85. Tellegen B.D.H. On nullators and norators // *IEEE Transactions on circuit theory*.– 1966.– CT-13.– N 4.– P. 466–469.
86. Thomas P. Geschichte und Gegenwart der Physik an der Philipps-Universität Marburg // <http://www.physik.uni-marburg.de/de/portraet/tradition/geschichte-und-gegenwart-des-fb-physik.html>, 2001.– 21 s.
87. Vorperian V. Improved circuit analysis techniques require minimum algebra // *Electronic Design News*.– 1995.– P. 125–134.
88. Vorperian V. Fast analytical techniques for electrical and electronic circuits.– Cambridge University Press, 2002.– 480 p.
89. Wang R.T.P. On the sign of a common tree product // *Circuit theory*.– 1966.– Vol. CT-13, N 3.– P. 103–105.
90. Weinberg L. Kirchhoff's «Third and fourth laws» // *IRE Trans. on circuit theory*. 1958.– Vol. CT-5, N1.– P. 8–30.
91. Wheatstone C. Beschreibung verschiedener neuen Instrumente und Methoden zur Bestimmung der Constanten einer Volta'schen Kette // *Annalen der Physik und Chemie*.– Leipzig, 1844.– Bd 62.– S. 499–543.
92. Wierzba G. M. Spice – a symbolic spice program for linear active circuits // *Proc. 32nd Midwest Symp. on CAS*.– 1989. – P. 1197–1201.
93. Winkelmann A. Handbook of Physics. Griffiths Phil. Trans. – 1895.– Vol. 2., Pt. 2.– 338 p.
94. Wozniacki H. Analiza ukladow elektrycznych za pomoca ukladow przelaczajacych // *Biuletyn wojskowej akademii technicznej im. J.Dabrowskiego*.– 1967.– N 11.– S. 19–35.
95. Агаева Р.М. Доказательство схемно-алгебраических тождеств методом бисекции // *Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН-2006*.– Ульяновск: УЛГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 3–7.

96. Анисимов В.И., Козьмин Н.Г. Анализ электронных схем на ЭЦВМ методом К-деревьев // Радиоэлектроника.– 1973.– № 6.– С. 54–59.

97. Арайс Е.А., Яковлев Н.Е. Автоматизация аналитических вычислений в научных исследованиях.– Новосибирск: Наука, 1985.– 222 с.

98. Арайс Е.А., Дмитриев В.М. Автоматизация моделирования многосвязных механических систем.– М.: Машиностроение, 1987.– 240 с.

99. Беллерт С., Возняcki Г. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел. – М.: Мир, 1972.– 334 с.

100. Березко Л.А., Шаповалов Ю.И. Реализация метода подсхем при символическом анализе линейных схем // Изв. Вузов. Радиоэлектроника.– 1980.– Т. 23, №6.– С. 21–25.

101. Березуев Р.И., Курганов С.А., Филаретов В.В., Шеин Д.В. SCAD – система символьного анализа и диагностики линейных электронных цепей // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез и анализ: Тр. междунар. конф. КЛИН–2005. – Ульяновск: УлГТУ. – 2005. – Т. 3. – С. 3–11.

102. Березуев Р.И., Курганов С.А., Филаретов В.В., Шеин Д.В. Символьный анализ и диагностика электронных цепей // Государственный координационный центр информационных технологий.– №ОФАП 3981; № ГР 50200401291. – 2004.

103. Березуев Р.И., Горшков К.С., Филаретов В.В. Схемное отображение системы уравнений на транскондуктивных усилителях // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Тр. междунар. конф. КЛИН–2007.–Ульяновск: УлГТУ, 2007. –Т.3.–С. 11–18.

104. Билярский П. С. Материалы для биографии Ломоносова. – Спб., тип. Акад. наук, 1865.– 820 с.

105. Бондаренко А.В. Синтез иммитансных матриц с нуллорами.– Изв. вузов. Энергетика.– 1977, № 2.– С. 28–34.

106. Браун Ф.Т. Непосредственное применение правила циклов к графам связей // Применение теории графов связей в технике.– М.: Мир, 1974.– С. 84–94.

107. Браун Я. Ориентация нуллора // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 299–308.

108. Власенко О.Ф., Тухтаров В.Н., Филаретов В.В. Формульный вывод, оптимизационный расчет и графическое отображение передаточных функций электронных схем // Проблемы автоматизированного моделирования в электронике: Тез. докл. междунар. конф.– Киев: Общество “Знание” Украины, 1993.– С. 29–30.

109. Волгин Л. И. Аналоговые операционные преобразователи для измерительных приборов и систем. – М.: Энергоатомиздат, 1983.– 208 с.

110. Волгин Л.И., Филаретов В.В. Взаимная обратимость и реверсивное топологическое преобразование активных электрических цепей // Схемно-топологические модели активных электрических цепей:

Синтез и анализ: Тр. международ. конф. КЛИН–2003.–Ульяновск: УлГТУ, 2003.– Т. 4.– С. 9–16.

111. Волгин Л.И., Филаретов В.В. Инверсные топологические преобразования электрических цепей с операционными усилителями // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2004.–Ульяновск: УлГТУ, 2004.–Т.4.–С.20–27.

112. Волгин Л. И., Горшков К. С., Филаретов В. В. Реализация структурных схем высокостабильных усилительных устройств на базе транскондуктивных усилителей // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2006.–Ульяновск: УлГТУ, 2006.–Т.3.– С. 28–37.

113. Волгин Л.И., Королев Ф.А., Филаретов В.В. Схемно-алгебраический анализ и расчет погрешностей операционных преобразователей // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2006. –Ульяновск: УлГТУ, 2006. –Т.3.–С. 38–60.

114. Волгин Л.И., Королев Ф.А., Филаретов В.В. Схемно-алгебраический анализ и принципы построения аналоговых операционных преобразователей : учебное пособие. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – 88 с.

115. Волгин Л. И., Горшков К. С., Филаретов В. В. Алгоритм транскондуктивной реализации структурных схем высокоточных усилительных устройств с аддитивной коррекцией погрешности // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2007. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 3.–С. 18–24.

116. Волгин Л.И., Королев Ф.А. Топологические преобразования взаимозамещением входов и выходов активных электрических цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2007. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 3.– С. 24–31.

117. Волгин Л.И., Королев Ф.А., Филаретов В.В. Топологическое преобразование структурных схем путем переключения входа или выхода усилителя // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2007. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 3. – С. 31–36.

118. Волгин Л.И., Королев Ф.А., Филаретов В.В. Схемно-алгебраический анализ и топологические преобразования моделей электронных цепей. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – 356 с.

119. Вольнов В.Е., Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ сложных электрических цепей и сетей с помощью программы *CIRSYMD* // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2004.–Ульяновск: УлГТУ, 2004.– Т. 4.– С. 27–30.

120. Вольнов В.Е. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ электронных цепей и электрических систем методом схемно-алгебраической редукции // Схемно-топологические модели активных

электрических цепей: Синтез и анализ: Тр. международ. конф. КЛИН–2005. – Ульяновск: УлГТУ. – 2005. – Т. 3. – С. 34–41.

121. Гальперин И. И. Структура и число связей регулируемых систем // Изв. Всесоюз. теплотехн. ин-та. – 1946. – № 7, 8, 12.

122. Галямичев Ю.П. Расчет активных схем при помощи деревьев схем // Электросвязь.– 1960.– № 8.– С. 48–57.

123. Горшков К.С., Токарев Ю.В. Реконструкция полных, цепных и лестничных схем на основе формул схемных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2007. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 3. – С. 39–48.

124. Горшков К.С., Токарев Ю.В. SymSin – программа для восстановления электрических схем с двухполюсными элементами на основе символьного выражения схемного определителя.– М.: ОФАП Госкоорцентра Минобрнауки России.– №ОФАП 9588.– 2007.

125. Горшков К.С., Токарев Ю.В., Филаретов В.В. Генерация электрических схем, инвариантных к характеристическому уравнению // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2007. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 3. – С. 48–52.

126. Горшков К.С. Символьные и матрично-численные методы моделирования электронных цепей: противостояние и взаимодополнение // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2007. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 3. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 3. – С. 234–245.

127. Горшков К.С., Стенюшкин Д.И. Алгоритм и программа транскондуктивной реализации электронных цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 26–34.

128. Горшков К.С., Стенюшкин Д.И. SchemeConverter – программа для генерации схем транскондуктивной реализации усилительных устройств.– М.: ОФАП Госкоорцентра Минобрнауки России.– №ОФАП 11893.– 2008.

129. Горшков К.С., Токарев Ю.В., Филаретов В.В. Генерация патентоспособных схемных решений с помощью программы структурного синтеза *SymSin* // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 34–40.

130. Горшков К.С., Токарев Ю.В. InterSyn – программа для интерактивного синтеза электрических схем методом подключения дополнительного элемента.– М.: ОФАП Госкоорцентра Минобрнауки России.– №ОФАП 11894.– 2008.

131. Горшков К.С., Токарев Ю.В., Филаретов В.В. Исключение изоморфных структур при структурном синтезе электронных схем по их символьным схемным функциям // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 40–46.

132. Горшков К.С., Токарев Ю.В., Филаретов В.В. Эквивалентные преобразования электрических цепей переносом управляющих ветвей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. / Под ред. В.В. Филаретова.–Ульяновск: УлГТУ, 2008.–Вып. 6.–С. 46–56.

133. Горшков К.С., Филаретов В.В. Установление изоморфизма ненаправленных и ориентированных графов на основе распределения показателей участия их ребер и дуг // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 56–72.

134. Горшков К.С., Филаретов В.В. Схемно-символьный анализ электрических цепей с многомерными управляемыми источниками // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 72–79.

135. Горшков К.С., Токарев Ю.В., Филаретов В.В. Анализ и синтез линейных электрических цепей методом схемных определителей: Учебное пособие.– Ульяновск: УлГТУ, 2008.– 240 с.

136. Горшков К.С., Филаретов В.В. Реализация структурных схем электрических цепей на основе трансдуктивных усилителей // Электричество.– 2009.– №1.– С. 32–40.

137. Горшков К.С., Филаретов В.В. Структурная оптимизация электронных схем переключением активных элементов // Электроника и связь: Тематический выпуск «Электроника и нанотехнологии». – Киев, 2009.– С. 141–146.

138. Горшков К.С., Емельянов С.Б., Забродина А.И., Кузнецов А.М., Тюрина А.Ю. Toleralize – программа для определения мультипликативной погрешности преобразования линейных электрических цепей и допусков на элементы.– М.: ОФАП Госкоорцентра Минобрнауки России.– №ОФЭРНиО 00214; №ГР 50200900973.– 11.09.2009.

139. Горшков К.С., Лагунков О.А., Петров А.С., Разумков М.Ю. Switcher – программа структурного синтеза электрических цепей, инвариантных относительно схемной функции.– М.: ОФАП Госкоорцентра Минобрнауки России.– № ОФЭРНиО 00211; №ГР 50200900971.– 11.09.2009.

140. Горшков К.С., Филаретов В.В. Влияние преобразований переключением активных элементов на входные и выходные сопротивления цепи // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – Вып. 7. – С. 30–37.

141. Горшков К.С., Филаретов В.В. Преобразование электрических цепей переносом активных элементов через сечения и контуры с нуллорами // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – Вып. 7. – С. 38–45.

142. Горшков К.С., Филаретов В.В. Свойство замкнутости преобразований переключением ветвей активных элементов // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов / Под ред. В.В. Филаретова.–Ульяновск: УлГТУ, 2009.– Вып.7.–С. 46–51.

143. Горшков К.С., Филаретов В.В. Схемно-алгебраические формулы для погрешности преобразования и допусков электрических цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – Вып. 7. – С. 101–112.

144. Горшков К.С., Филаретов В.В. Формирование дробных символьных выражений для схемных функций электрических цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – Вып. 7. – С. 136–149.

145. Горшков К.С., Филаретов В.В. Жизнь и деятельность Вильгельма Фойснера, основоположника схемного подхода к анализу цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – Вып. 7. – С. 245–276.

146. Горшков К.С. Порождение транскондуктивных реализаций структурных схем электрических цепей преобразованием переключения // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – Вып. 7. – С. 52–59.

147. Горшков К.С. Структурный синтез электрических цепей на основе полиномиальных функций методом схемных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – Вып. 7. – С. 3–17.

148. Гутенмахер Л.И. Электрические модели.–Киев:Техніка,1975.– 176 с.

149. Демирчян К.С., Бутырин П.А. Моделирование и машинный расчет электрических цепей.– М.: Высшая школа, 1988.– 335 с.

150. Дмитришин Р. В., Шаповалов Ю. И. Диакоптический алгоритм анализа сложных линейных цепей на ЭВМ // Автоматизация проектирования в электронике. – Киев, 1975. – Вып. 12. – С. 42–46.

151. Дмитришин Р.В., Захария А.И. Алгоритм вычисления буквенно-численных схемных функций // Теорет. электротехника.– Львов, 1979.– Вып. 26.– С. 84–87.

152. Дмитришин Р.В. Генерация формулы характеристического уравнения многовариантного анализа схем // Изв. Вузов. МВССО СССР. Радиоэлектроника.– 1982.– Т. 25, №6.– С. 89–91.

153. Дмитришин Р.В. Полиномиальные методы символьного анализа электрических цепей: Дис. ... докт. техн. наук: 05.09.05 (Теорет.

электротехника) / Гос. ун-т “Львовская политехника”.– Львов, 1996.– 284 с. (На укр. языке).

154. Дмитришин Р. До 100-річчя формул Фойснера // *Polsko-Ukraińska Szkoła-Seminarium «Aktualne problemy elektrotechniki teoretycznej: nauka i dydaktyka»*.– Ukraina, Alusza, 2001.– S. 23–26.

155. Дмитришин Р.В., Филаретов В.В. Генерация схемных определителей на основе бинарного дерева формулы // *Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез и анализ: Тр. междунар. конф. КЛИН–2003.*–Ульяновск: УлГТУ, 2003.– Т. 4.– С. 20–27.

156. Дмитришин Р.В., Филаретов В.В., Шеин Д.В. Нуллорно-унисторный подход к анализу цепей с операционными усилителями // *Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез и анализ: Тр. междунар. конф. КЛИН–2003.*–Ульяновск: УлГТУ, 2003.– Т. 4.– С. 27–36.

157. Дмитришин Р.В. Матричные и схемные определители // *Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. междунар. конф. КЛИН–2004.*–Ульяновск: УлГТУ, 2004.– Т. 4.– С. 38–47.

158. Дмитришин Р.В. Граф числителя полиномиальной проводимости // *Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. междунар. конф. КЛИН–2005.* – Ульяновск: УлГТУ. – 2005. – Т. 3. – С. 54–61.

159. Дмитришин Р.В. Генерация формул определителей полных схем // *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Тр. междунар. конф. КЛИН–2007.* – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 3.– С. 60–71.

160. Долбня В.Т. Топологические методы анализа и синтеза электрических цепей и систем. – Харьков: Изд-во об-ия "Вища школа" при Харьк. гос. ун-те, 1974.– 145 с.

161. Ермолаев Ю.В. Повышение точности анализа электрических цепей на основе обобщенных преобразований их схем замещения при выполнении многовариантных расчетов: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.09.05 (Теорет. электротехника) / Ленингр. гос. техн. ун-т.– Л.,1990.–16 с.

162. Ерохов И.В. Библиография «Кирхгоф Г. Избранные труды.– М.: Наука, 1988» // *Электричество.*– 1990.– № 7.– С. 91–92.

163. Ерохов И.В. Реконструкция первого топологического метода расчета электрических цепей, созданного Г.Кирхгофом // *Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика : Тр. междунар. конф. КЛИН–2006.* – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 76–83.

164. Казанджан Н.И., Скоробогатько Н.В., Калниболотский Ю.М. О методах численно-символьного анализа линейных электронных схем // *Электрон. моделирование.*– 1983.– № 4.– С. 56–60.

165. Калниболотский Ю.М., Рысин В.С. Топологический анализ электронных схем // *Радиотехника.*– 1969.– № 4.– С. 30–34.

166. Камедин Т.П., Филаретов В.В. Графический вывод схемно-алгебраических выражений для символьного анализа электронных цепей // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2006. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 93–98.

167. Кениг Г., Блекуэлл В. Теория электромеханических систем.– М.Л.: Энергия, 1965.– 423 с.

168. Кирхгоф Г.Р. Избранные труды.– М.: Наука, 1988.– 428 с.

169. Компьютерная алгебра: Символьные и алгебраические вычисления / Под ред. Б.Бухбергера, Дж.Коллинза, Р.Лооса.– М.: Мир, 1986.– 392 с.

170. Королев В.А. Метод прямого определения коэффициентов функции цепи // Радиотехника. – 1981. – Т. 36, №10.– С. 87 – 90.

171. Королев Ф. А., Курганов С. А., Филаретов В. В. Символьный анализ линейных электрических цепей методом объединения схемно-алгебраических формул подсхем // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2006. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 98–115.

172. Королев, Ф. А., Филаретов В. В. О методе замещения управляемых источников независимыми источниками (по поводу статьи Г. А. Белова и В. Г. Захарова в журнале «Электричество») // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2006. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 220–230.

173. Королев Ф. А., Курганов С. А., Филаретов В. В. Сравнение методов анализа электрических цепей по частям в символьном виде // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2007. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 3. – С. 91–104.

174. Королев Ф. А., Курганов С. А., Филаретов В. В., Шеин Д. В. Алгоритм и программа схемно-алгебраического анализа электрических цепей по частям // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2007. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 3. – С. 104–113.

175. Королев Ф. А., Филаретов В. В. Отображение подсхем производными схемами на внешних узлах для анализа электрических цепей по частям // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2007. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 3. – С. 114–124.

176. Королев Ф. А., Филаретов В.В. Сравнение единых и последовательных выражений матричных определителей по точности вычислений // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 110–127.

177. Королев Ф. А., Филаретов В. В. Сравнение методов получения схемных функций для электрических цепей с управляемыми источниками // *Электричество*.– 2008.– №5.– С. 42–53.

178. Коротков А.С., Курганов С.А., Филаретов В.В. Схемно-алгебраический анализ электрических схем с переключаемыми конденсаторами в частотной области // *Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. междуна. конф. КЛИН-2006*.– Ульяновск: УлГТУ, 2006.– Т. 3.– С. 115–127.

179. Коротков А.С., Курганов С.А., Филаретов В.В. Схемно-алгебраические формулы выделения базовых элементов с переключаемыми конденсаторами // *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Тр. междуна. конф. КЛИН-2007*. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 3. – С. 125–137.

180. Крон Г. Исследование сложных систем по частям - диакоптика. – М.: Наука, 1972.– 544 с.

181. Курганов С.А. Параметрическая адаптация линейных безынерционных электронных цепей на основе схемно-символьного подхода // *Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения: Тр. междуна. конф. КЛИН-2001*.– Ульяновск: УлГТУ, 2001.– Т. 3.– С. 24–27.

182. Курганов С.А., Филаретов В.В., Шеин Д.В. Схемно-символьный и матрично-численный анализ установившихся режимов линейных электрических цепей: Метод. указания.– Ульяновск: УлГТУ, 2002.– 56 с.

183. Курганов С.А. Символьный подход к решению задачи диагностики электрических цепей // *Электричество*.– 2002.– № 8.– С. 49–52.

184. Курганов С.А., Филаретов В.В. О применении операционных усилителей для компенсации импедансов независимыми источниками // *Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез и анализ: Тр. междуна. конф. КЛИН-2003*.–Ульяновск: УлГТУ, 2003.– Т. 4.– С. 55–58.

185. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ линейных электронных цепей на основе схемно-алгебраических формул выделения параметров многополюсников // *Электричество*.– 2003.– № 6.– С. 52–65.

186. Курганов С.А. Схемно-алгебраические формулы для определения цепных параметров проходных четырехполюсников в символьной форме // *Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез и анализ: Тр. междуна. конф. КЛИН-2003*.–Ульяновск: УлГТУ, 2003.– Т. 4.– С. 52–55.

187. Курганов С.А., Филаретов В.В. Использование схемных функций при вариации параметров управляемых источников в линейных электронных цепях // *Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез и анализ: Тр. междуна. конф. КЛИН-2003*.–Ульяновск: УлГТУ, 2003.– Т. 4.– С. 58–63.

188. Курганов С. А., Филаретов В. В. Анализ установившихся режимов линейных электрических цепей методом схемных определителей: Учебное пособие.– Ульяновск: УлГТУ, 2003.– 148 с.

189. Курганов С. А., Филаретов В. В. Символьный анализ и диагностика линейных электрических цепей методом схемных определителей: Учебное пособие. – Ульяновск: УлГТУ, 2003. – 228 с.

190. Курганов С.А., Филаретов В.В. Метод управляющего генератора для анализа линейных цепей с несколькими источниками воздействия // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2004.–Ульяновск: УлГТУ, 2004.– Т. 4.– С. 69–75.

191. Курганов С.А., Филаретов В.В. Топологические необходимые и достаточные условия решения базисной задачи диагностики // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2004.–Ульяновск: УлГТУ, 2004.– Т. 4.– С. 75–80.

192. Курганов С.А., Филаретов В.В. Метод косвенной компенсации на основе управляемых источников для символьной диагностики линейных цепей // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2004.– Ульяновск: УлГТУ, 2004.– Т. 4.– С. 80–91.

193. Курганов С.А. Метод схемных определителей в базисе зарядов и напряжений для анализа цепей с переключаемыми конденсаторами // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2004.–Ульяновск: УлГТУ, 2004.– Т. 4.– С. 64–69.

194. Курганов С. А., Филаретов В. В. Символьный анализ и диагностика линейных электрических цепей методом схемных определителей: Учебное пособие.– Ульяновск: УлГТУ, 2004.– 248 с.

195. Курганов С.А., Филаретов В.В. Неявный принцип наложения воздействий в линейных электрических цепях // Электричество.– 2005.– № 1.– С. 32–43.

196. Курганов С. А., Филаретов В. В. Схемно-алгебраический анализ, диакоптика и диагностика линейных электрических цепей: Учебное пособие. – Ульяновск: УлГТУ, 2005. – 320 с.

197. Курганов С.А., Филаретов В.В. Автоматизированное построение схемно-алгебраических формул выделения многополюсников // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2005. – Ульяновск: УлГТУ. – 2005. – Т. 3. – С. 85–95.

198. Курганов С.А., Филаретов В.В. Схемно-алгебраические тождества для топологических функций линейных электрических цепей // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2005. – Ульяновск: УлГТУ. – 2005. – Т. 3. – С. 95–106.

199. Курганов С.А., Филаретов В.В. Формирование передаточных функций электронных цепей по частям методом неравновесных двоичных векторов // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2005. – Ульяновск: УлГТУ. – 2005. – Т. 3. – С. 106–116.

200. Курганов С.А. Схемно-алгебраический анализ чувствительности линейных электрических цепей // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2006. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 129–135.

201. Курганов С.А., Филаретов В.В. Эффективность анализа контурных сетей при диагональном способе деления их на части // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2006. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 135–138.

202. Курганов С.А., Миланцей Т., Филаретов В.В. Обозначения аномальных элементов в теории электрических цепей // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2006. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 236–239.

203. Курганов С. А. Символьный анализ и диакоптика электрических цепей: Дис. ... докт. техн. наук 05.09.05 (Теоретическая электротехника) / Ульяновский гос. техн. ун-т, Санкт-Петербургский гос. техн. ун-т. – Ульяновск–Санкт-Петербург, 2006. – 328 с.

204. Курганов Д.С., Курганов С.А., Филаретов В.В. Нахождение порядка сложности произвольной активной электрической цепи методом схемных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 140–152.

205. Курганов Д.С., Филаретов В.В. Алгоритм и программа формирования полиномиальных схемных функций электронных цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 152–165.

206. Курганов С.А., Ушаков П.А., Филаретов В.В. Символьный анализ линейных электрических цепей с распределенными RC -элементами // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 165–188.

207. Курганов С.А., Филаретов В.В. Схемно-алгебраическое формирование условий равновесия для мостовых электрических цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 188–202.

208. Курганов С.А., Филаретов В.В. Неравновесные нулловые схемы для символьного анализа цепей методом объединения подсхем // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 202–211.

209. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ линейных аналоговых и дискретно-аналоговых электрических цепей: Учебное пособие. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 300 с.

210. Коротков А.С., Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ дискретно-аналоговых цепей с переключаемыми конденсаторами // Электричество. – 2009. – № 4. – С. 37–46.

211. Лаксберг Э.А. Моделирование электронных цепей на основе схемной редукции. – Таллин: Валгус, 1990. – 159 с.

212. Лебедев М.Г., Филаретов В.В. Схемно-алгебраический подход в механике поступательного движения // Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения: Тр. международ. конф. КЛИН–2001. – Ульяновск: УлГТУ, 2001. – Т. 3. – С. 16–19.

213. Ленин В.И. Очередные задачи Советской власти // Избранные сочинения. Т.8. Окт. 1917–май 1919. – М.: Политиздат. – С.160

214. Лыпарь Ю.И., Шакиров М.А. Анализ электрических цепей с аномальными элементами: Метод. указания. – Л.: ЛПИ, 1987. – 40 с.

215. Максвелл Д.К. Трактат об электричестве и магнетизме. В 2-х т.: Т. 1. – М.: Наука, 1989. – 416 с.

216. Матвийчук Я.Н. Разработка метода и программы анализа линейных схем по частям // Теоретическая электротехника. – Львов, 1980. – Вып. 29. – С. 41–52.

217. Мэзон С., Циммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы / пер. с англ. под ред. П. А. Ионкина. – М.: Изд-во иностр. литературы, 1963. – 620 с.

218. Миланцей Т., Славский Г.Н., Филаретов В.В. Пять формул метода схемных определителей // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2004. – Ульяновск: УлГТУ, 2004. – Т. 4. – С. 102–113.

219. Миланцей Т., Филаретов В.В. От идеального усилителя Теллегена до многомерного неудаляемого управляемого источника // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез и анализ: Тр. международ. конф. КЛИН–2005. – Ульяновск: УлГТУ. – 2005. – Т. 3. – С. 140–155.

220. Миланцей Т., Филаретов В. В. Правило Кирхгофа для нахождения числителя и знаменателя схемной функции по ее знаменателю (по поводу статьи Г.А. Белова и В.Г. Захарова в журнале «Электричество») // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2005. – Ульяновск : УлГТУ, 2005. – Т. 3. – С. 217–220.

221. Миланцей Т. Идеальный усилитель Теллегена // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2007. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 3. – С. 222–234.

222. Минаков В.А., Шеин Д.В., Яфаров Л.Ш. Генерация формул схемных определителей с учетом одинаковых параметров // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2006. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 153–161.

223. Мулявка Я. Схемы на операционных усилителях с переключаемыми конденсаторами. М.: Мир, 1992. – 416 с.

224. Оптимальная реализация линейных электронных RLC -схем / А.А. Ланнэ, Е.Д. Михайлова, Б.С. Саркисян, Я.Н. Матвийчук. – Киев: Наукова думка, 1981. – 208 с.

225. Павлова Е.А., Филаретов В.В. Схемно-топологическое разложение матричных определителей // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2004. – Ульяновск: УлГТУ, 2004. – Т. 4. – С. 114–119.

226. Павлова Е.А., Серов В.Ф., Филаретов В.В. Выражение K -деревьев через схемные определители и построение безызбыточных формул бисекции электрических цепей // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2005. – Ульяновск: УлГТУ. – 2005. – Т. 3. – С. 155–174.

227. Робишо Л., Буавер М., Робер М. Направленные графы и их приложение к электрическим цепям и машинам. – М.–Л.: Энергия, 1964. – 248 с.

228. Савиновский Ю.А., Курганов С.А., Филаретов В.В. Алгоритм генерации прадеревьев комбинированного графа / Ред. журн. “Радиоэлектроника”. – Деп. в ВИНТИ 22 07 82, № 3951–В82. – 8 с. – Реф. в: Радиоэлектроника. – 1982. – № 12. – С. 96.

229. Сешу С., Рид М.Б. Линейные графы и электрические цепи. – М.: Высш. шк., 1971. – 448 с.

230. Сигорский В.П. Методы анализа электрических схем с многополюсными элементами. – Киев: Изд-во АН УССР, 1958. – 402 с.

231. Сигорский В.П. Анализ электронных схем. – Киев: Гос. изд-во техн. лит. УССР, 1960. – 176 с.

232. Сигорский В. П., Петренко А. И. Основы теории электронных схем. – Киев: Техника, 1967. – 610 с.

233. Смирнов В.С., Филин В.А. Программа FASTMEAN для моделирования электронных цепей // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2005. – Ульяновск: УлГТУ. – 2005. – Т. 3. – С. 174–176.

234. Тарабаров С.Б. Анализ электронных схем методом формирования матрицы алгебраических дополнений // Радиоэлектроника. – 1983. – № 6. – С. 77–79.

235. Тарабаров С.Б. Множественно-топологический метод анализа электронных схем // Радиоэлектроника.– 1985.– № 6.– С. 100–102.

236. Теоретические основы электротехники. Т. 1 / П. А. Ионкин, А.И. Даревский, Е.С. Кухаркин, В.Г. Миронов, Н.А.Мельников. – М.: Высшая школа, 1976.– 544 с.

237. Тетельбаум И.М., Шнейдер Ю.Р. Практика аналогового моделирования динамических систем: Справочное пособие. – М.: Энергоатомиздат, 1987.–384 с.

238. Тимкин Ю.В., Филаретов В.В., Шеин Д.В. Неудаляемые дуги в унисторном графе и их применение для раскрытия суммарных алгебраических дополнений // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез и анализ: Тр. междунар. конф. КЛИН–2003.–Ульяновск: УлГТУ, 2003.– Т. 4.– С. 82–86.

239. Токарев Ю. В. Оптимизация алгоритма синтеза схем на основе схемного определителя // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 246–251.

240. Токарев Ю. В. Теоретико-множественная интерпретация выделения управляемых источников// Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 251–261.

241. Трохименко Я.К. Метод обобщенных чисел и анализ линейных цепей. – М.: Советское радио, 1972. – 212 с.

242. Трохименко Я.К. Модификация метода обобщенных чисел // Радиоэлектроника.– 1999.– № 9.– С. 3–14.

243. Филаретов В.В. К цифровому моделированию электронных схем в топологическом базисе ветвей // Электрон. моделирование.–1985.–№ 6.– С.92–94.

244. Филаретов В.В. Метод разложения определителя ненаправленного графа по ребрам с максимальным участием / Ред. журн. “Радиоэлектроника”.– Деп. в ВИНТИ 27.11.85, № 8184-В85.– 12 с.– Реф. в: Радиоэлектроника.– 1986.– № 3.– С. 110.

245. Филаретов В.В. Метод изоморфных преобразований для анализа квазиполных и квазиоднородных графов проводимостей // Электричество.– 1987.– № 5.– С. 5–9.

246. Филаретов В.В. Формирование коэффициентов функций RLC-схемы полной топологической структуры // Электричество.– 1987.– № 6.– С. 42–47.

247. Филаретов В.В. Программа автоматического вывода аналитических выражений для функций аналоговых измерительных преобразователей // 8-я Всесоюз. конф. «Измерительные информационные системы»: Тез. докл.– Ташкент: Политехн. ин-т, 1987.– Ч. 3.– С. 115.

248. Филаретов В.В. Алгоритм формирования экономных буквенно-численных выражений для коэффициентов схемных функций // Электрон. моделирование.– 1987.– № 4.– С. 33–35.

249. Филаретов В.В. Алгоритм разложения определителя ненаправленного графа проводимостей по ребрам, входящим в пути между парами вершин // Теорет. электротехника.– Львов, 1988.– Вып.45.– С. 28–34.
250. Филаретов В.В. Унисторно-сигнальный граф электронной схемы и его анализ // Электричество.– 1989.– № 9.– С. 48–55.
251. Филаретов В.В. Неявный принцип наложения и анализ линейных электрических цепей // Электричество.– 1990.– № 3.– С. 37–43.
252. Филаретов В.В. Уравнения топологических функций и их некоторые свойства // Электричество.– 1990.– № 5.– С. 73–76.
253. Филаретов В.В. Разложение определителя гибридного графа схемы с усилителями напряжения методом удаления и стягивания сигнальных дуг // Электрон. моделирование.– 1990.– № 3.– С. 38–44.
254. Филаретов В.В. Алгоритмы символьно-топологического анализа электрических цепей: Дис. ... канд. техн. наук: 05.09.05 (Теорет. электротехника) / Ленингр. гос. техн. ун-т. – Л., 1990. – 148 с.
255. Филаретов В.В. Программа SYMBOL автоматического вывода передаточной функции электронной схемы произвольной структуры // Алгоритмы и устройства обработки сигналов и автоматизация проектирования.– Таллин: АН Эстонии, 1991.– С. 130–148.
256. Филаретов В.В. Алгоритм приведения развернутых алгебраических выражений топологических функций к скобочной форме и его реализация в программе SYMBOL // Алгоритмы и устройства обработки сигналов и автоматизация проектирования.– Таллин: АН Эстонии, 1991.– С. 149–166.
257. Филаретов В.В. Исследования Вильгельма Фойснера в области теоретической электротехники // Электричество.– 1992.– № 9.– С. 64–67.
258. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения ветвей и дуг // Электричество.– 1992.– № 7.– С. 31–37.
259. Филаретов В.В. Оптимизация формул схемных функций электрических цепей // Электричество.– 1993.– № 9.– С. 64–68.
260. Филаретов В.В., Шеин Д.В. Адаптивный алгоритм и программа генерации сверхкомпактных символьных выражений схемных функций // Проблемы автоматизированного моделирования в электронике: Тез. докл. международ. конф.– Киев: Об-во “Знание” Украины, 1993.– С. 28–29.
261. Филаретов В.В. Обобщенный унисторный граф электронной схемы и его анализ // Электричество.– 1993.– № 5.– С. 65–70.
262. Филаретов В.В., Шеин Д.В. Машинная генерация оптимальных формул для функций пассивных схем // Проблемы автоматизированного моделирования в электронике: Сб. докл. международ. конф.– Киев: Политехн. ин-т, 1994.– С. 28–32.
263. Филаретов В.В. Оптимальный синтез формул схемных функций // Проблемы автоматизированного моделирования в электронике: Сб. докл. международ. конф.– Киев: Политехн. ин-т, 1994.– С. 23–27.

264. Филаретов В. В. Приоритеты в науке, или еще об одном слагаемом успеха // *Электричество*.– 1994.– № 12.– С. 63–64.

265. Филаретов В.В. Синтез оптимальных формул схемных функций электрических цепей // *Электричество*.– 1995.– № 4.– С. 36–43.

266. Филаретов В.В. Топологические формулы для преобразования полного электрического многоугольника в эквивалентную звезду // *Электричество*.– 1995.– № 11.– С. 50–55.

267. Филаретов В.В., Шеин Д.В. Оптимальный синтез символьных функций для сложных схем с операционными усилителями // *Проблемы физической и биомедицинской электроники: Сб. докл. международ. конф.*– Киев: Политехн. ин-т, 1995.– С. 216–220.

268. Филаретов В.В. Топологический синтез оптимальных формул для преобразования полного электрического многоугольника в эквивалентную звезду // *Электричество*.– 1996.– № 4.– С. 63–70.

269. Филаретов В.В. Оптимальная реализация дешифраторного метода анализа электрических цепей // *Электричество*.– 1996.– № 10.– С. 43–49.

270. Филаретов В.В. Об иерархическом подходе к символьному анализу сложных электронных схем // *Проблемы физической и биомедицинской электроники: Сб. докл. международ. конф.*– Киев: Национальный техн. ун-т Украины, 1996.– С. 132–136.

271. Филаретов В.В., Шеин Д.В. Символьная машинная программа вывода формул для функций активных и пассивных электрических цепей // *Тез. докл. 30-й науч.-техн. конф.*– Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 1996.– Ч. 1.– С. 43–44.

272. Филаретов В.В. О преобразовании полного электрического многоугольника к параллельным лучевым схемам // *Электричество*.– 1997.– № 2.– С. 58–60.

273. Филаретов В.В. Топологический синтез оптимальных формул для преобразования полного электрического многоугольника в эквивалентную звезду (ответ автора на замечания А.В.Нетушила) // *Электричество*.– 1997.– № 3.– С. 67–68.

274. Филаретов В.В. Схемный подход к символьному анализу активных электрических цепей // *Электроника и связь: Науч.-техн. сб.* – Киев, 1997. – Вып. 2. – Ч. 1. – С. 97–101.

275. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // *Электричество*.– 1998.– № 5.– С. 43–52.

276. Филаретов В.В., Шеин Д.В. Компьютерный интеллектуальный справочник схемных функций активных электрических цепей // *Методы и средства преобразования и обработки аналоговой информации: Тез. докл. международ. конф.*– Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 1999.– С. 13.

277. Филаретов В.В. Формирование символьных функций для активных электрических цепей методом стягивания и удаления ветвей // *Электричество*.– 2001.– № 4.– С. 43–51.

278. Филаретов В. В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // *Электричество*.– 2001.– № 8.– С. 33–42.

279. Филаретов В.В. Схемное отображение матрицы для символьного решения систем линейных алгебраических уравнений // Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения: Тр. международ. конф. КЛИН–2001.–Ульяновск: УлГТУ, 2001.–Т.3.–С.13–15.

280. Филаретов В.В., Шеин Д.В. Формирование, интерпретация и компиляция символьных функций электронных схем // Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения: Тр. международ. конф.– Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 2001.–С. 10–12.

281. Филаретов В.В. Анализ электрических цепей методом схемных определителей: Метод. указания к практическим занятиям по электротехнике и электронике.– Ульяновск: УлГТУ, 2001.– 40с.

282. Филаретов В.В. О взаимосвязи схемного и матричного определителей // Системы искусственного интеллекта: Алгоритмы обработки и модели: Тр. международ. конф. КЛИН–2002.– УлГТУ.– 2002.– Т. 4.– С. 85–92.

283. Филаретов В. В. Топологический анализ электрических цепей на основе схемного подхода: Дис. ... докт. техн. наук 05.09.05 (Теоретическая электротехника) / Ульяновский гос. техн. ун-т, Санкт-Петербургский гос. техн. ун-т. – Ульяновск–Санкт-Петербург, 2002. – 265 с.

284. Филаретов В.В. О схемных триадах Л.И.Волгина, порождаемых поворотом активного трехполюсника в активных электрических цепях // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез и анализ: Тр. международ. конф. КЛИН–2003.– Ульяновск: УлГТУ, 2003.– Т. 4.– С. 86–94.

285. Филаретов В.В. Состояние и проблемы развития схемного подхода к символьному анализу электрических цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2007. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 3.– С. 196–207.

286. Шакиров М.А. Применение метода переноса источников для расчёта и анализа линейных электрических цепей // Изв. вузов. Электромеханика. – 1973. – №11. – 1171–1175.

287. Шакиров М. А. Преобразования и диакоптика электрических цепей. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. – 196 с.

288. Шакиров М.А. Расчет сложных z-схем методом преобразований обобщенно-параллельных соединений: Методические указания.– Л.: Ленингр. политехн. ин-т, 1985.– 28 с.

289. Шакиров М.А. Перенос элементов электрической цепи через 2х2 полюсники // Электричество. – 2007. – №11.– С. 45–53.

290. Шаповалов Ю.И., Давидюк Р.Д. Особенности реализации метода топологического анализа схем в программе АС13ЕС // Радиоэлектроника.– 1983.– № 6.– С. 79–81.

291. Шеин Д.В. Ликвидатор избыточных скобок и единиц в сложных алгебраических выражениях // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2006. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 153–161.

292. Ястребов Н.И. Повышение эффективности декомпозиционных алгоритмов символьного анализа // Радиоэлектроника.– 1985.– № 6.– С. 102–104.

293. <http://levul.org/sm/symbolic.htm> – Официальный сайт системы *Symbolic Circuit Analysis, Diagnosis and Synthesis*.

294. <http://www.fastmean.ru> – Смирнов В. С., Филин В. А. Программа моделирования электрических цепей *FASTMEAN*.

295. <http://www.eng.uts.edu.au/~benr/symbolic/> – *Rodanski B.S. Symbolic Circuit Analysis: Library of Benchmark Circuits*.

296. <http://www.cirlab.unifi.it/Sapwin> – *Symbolic Analysis Program for Windows*.

297. http://ru.wikipedia.org/wiki/Фойснер,_Фридрих_Вильгельм

298. http://ru.wikipedia.org/wiki/Feussner,_Friedrich_Wilhelm

299. http://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_схемных_определителей

300. http://ru.wikipedia.org/wiki/Method_circuit_determinants

Научное издание

ГОРШКОВ Константин Сергеевич
ФИЛАРЕТОВ Владимир Валентинович

**СХЕМНЫЙ ПОДХОД
ВИЛЬГЕЛЬМА ФОЙСНЕРА
И МЕТОД СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ**

Под редакцией В. В. Филаретова

Компьютерный набор и графику выполнил К. С. Горшков

ЛР №020640 от 22.10.97.

Подписано в печать 22.12.2009. Формат 60X84/16

Бумага писчая. Усл. печ. л. 10,93.

Тираж 200 экз. Заказ 1400

Ульяновский государственный технический университет.
432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32.

Типография УлГТУ. 432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32.