

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**С. А. Курганов,
В. В. Филаретов**

**Топологические правила и формулы
для анализа электрических цепей
без избыточности**

Ульяновск
2010

УДК 621.372.061

ББК 31.27.01

К 93

Рецензенты:

кафедра радиофизики и электроники Ульяновского государственного университета (зав. кафедрой – доктор физико-математических наук, профессор Н. Т. Гурин);

доктор технических наук, профессор В. А. Сергеев.

Научный редактор доктор технических наук В. В. Филаретов.

УДК 621.372.061

Курганов, С. А.

К 93 Топологические правила и формулы для анализа электрических цепей без избыточности / С. А. Курганов, В. В. Филаретов. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 109 с.

ISBN 978-5-9795-0739-2

Представлен схемный подход к символьному анализу линейных электрических цепей, позволяющий исключить появление избыточных слагаемых и вычислительных операций в выражениях схемных функций и откликов. Обсуждаются возможности минимизации избыточности в уравнениях Кирхгофа и их символьных решениях.

Рассматриваются и сравниваются топологические правила и формулы Кирхгофа, Максвелла и Фойснера. Показывается, что метод схемных определителей является логическим следствием классических топологических методов в сочетании с нулловым представлением числителей схемных функций и управляемых источников.

Метод схемных определителей применяется для символьного анализа электрических цепей с предельными (стремящимися к бесконечности) параметрами элементов. Предложены схемно-алгебраические формулы выделения параметров, позволяющие получать компактные выражения, минуя предельный переход от первоначального избыточного выражения.

Для специалистов в области теоретической электротехники и радиотехники, магистрантов и аспирантов соответствующих направлений и специальностей.

ISBN 978-5-9795-0739-2

© Курганов С. А., Филаретов В. В., 2010

© Оформление. УлГТУ, 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список условных сокращений	5
ВВЕДЕНИЕ	6
1. ПРОБЛЕМА ИЗБЫТОЧНОСТИ В СИМВОЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	7
1.1. Теория цепей начиналась с символьного анализа	7
1.2. Подходы к формированию символьных схемных функций ..	8
1.3. Промежуточные модели электрических цепей в виде матриц	10
1.4. Промежуточные модели электрических цепей в виде графов	11
1.5. Избыточность и отсутствие наглядности промежуточных моделей цепей	12
1.6. Метод схемных определителей	14
1.7. Нерешенные задачи символьного анализа	15
2. КЛАССИЧЕСКИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ	17
2.1. Избыточность символьных определителей	17
2.2. Топологические правила Кирхгофа	19
2.3. Топологические правила Максвелла	25
2.4. Топологические формулы Фойснера	27
2.6. Выводы	31
3. МЕТОД СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ	32
3.1. Схемно-алгебраические выражения схемных функций	32
3.2. Обобщения формул выделения	37
3.3. Теоретико-множественная интерпретация выделения управляемых источников	43
3.4. Условия вырождения схемы и алгоритм разложения определителей	50
3.5. Получение формул для АЧХ и ФЧХ схемных функций	57
3.6. Выводы	63
4. ФОРМИРОВАНИЕ СИМВОЛЬНЫХ ОТКЛИКОВ ДЛЯ ЦЕПЕЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ВОЗДЕЙСТВИЙ	64
4.1. Компактные (неявная и явная) формы представления откликов	65
4.2. Правила Кирхгофа и выявление резерва свертки	66
4.3. Правило контуров для ZE -схемы	68
4.4. Правило сечений для ZJ -схемы	70
4.5. Обобщения правил для YZ -схем	72

4.6. Активные контуры и сечения – физические основы топологических правил	73
4.7. Реконструкция топологического метода Кирхгофа	74
4.8. Выводы.	76
5. СИМВОЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ПРЕДЕЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ	77
5.1. Предельная символьная схемная функция.	77
5.2. Схемно-алгебраические формулы для выделения элементов с предельными параметрами	79
5.3. Примеры нахождения предельных функций с помощью САФ	87
5.4. Алгоритм разложения определителя схемы с предельными параметрами.	90
5.5. Выводы	91
6. МИНИМИЗАЦИЯ ИЗБЫТОЧНОСТИ В УРАВНЕНИЯХ КИРХГОФА	92
6.1. Формирование безызбыточных уравнений Кирхгофа для однородных Z - и Y -схем	92
6.2. Минимизация числа избыточных слагаемых в определителе Z -схемы	95
6.3. Минимизация числа избыточных слагаемых в определителях Y -схем	96
6.4. Исключение избыточных слагаемых путем разложения определителя по строкам с параметрами элементов.	97
6.4. Анализ схем с равным числом независимых сечений и контуров	98
6.6. Выводы	99
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	100
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.	101
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	102

СПИСОК УСЛОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ

АЧХ	амплитудно-частотная характеристика
ГНУИ	генератор неудаляемого управляемого источника
ДВ	двоичный вектор
ИНУН	источник напряжения, управляемый напряжением
ИНУТ	источник напряжения, управляемый током
ИТУН	источник тока, управляемый напряжением
ИТУТ	источник тока, управляемый током
ЛЭС	линейная электрическая схема
МСО	метод схемных определителей
НИ	независимый источник
НМН	неявный метод наложения
НПН	неявный принцип наложения
НУИ	неудаляемый управляемый источник
ОУ	операционный усилитель
ПНУИ	приемник неудаляемого управляемого источника
САВ	схемно-алгебраическое выражение
САФ	схемно-алгебраическая формула
СВО	символьное выражение отклика
ССФ	символьная схемная (системная) функция
ФЧХ	фазо-частотная характеристика
УИ	управляемый источник
ЯПН	явный принцип наложения

ВВЕДЕНИЕ

Под символьным анализом электрической цепи понимается формирование схемных функций или откликов в виде формул, содержащих параметры элементов в буквенном виде. Первые правила формирования символьных выражений для откликов в 1847 году предложил Кирхгоф – основатель теории электрических цепей [24, 91]. С тех пор среди вопросов теории линейных электрических цепей формирование символьных схемных функций (ССФ) занимает особое место.

Символьный анализ – компьютерная алгебра – получила в последнее десятилетие интенсивное развитие, разработаны универсальные компьютерные системы для проведения аналитических выкладок [25, 80]. Однако применения универсальных систем компьютерной алгебры, предназначенных для обработки абстрактных выражений, как правило, не эффективно применительно к электрическим цепям, поскольку такие системы не учитывают взаимно однозначного соответствия между выражением и структурой схемы [80]. Топология схемы является ключом к формированию компактных выражений без избыточности вычислений. Первым обратил на это внимание Кирхгоф.

Монография состоит из четырех глав. В первой главе подробно обсуждаются классические топологические правила и формулы Кирхгофа, Максвелла и Фойснера. Во второй главе, в подготовке которой принимал участие *Ю. В. Токарев*, рассматривается схемно-алгебраический метод схемных определителей, базирующийся на формулах Фойснера для выделения параметров сопротивлений и проводимостей. Вскрывается взаимосвязь между методом схемных определителей и топологическими правилами Кирхгофа и Максвелла. Предлагаются новые доказательства формул выделения управляемых источников.

В третьей главе, подготовленной с участием *Д. С. Курганова*, обосновываются специальные формулы для выделения параметров с бесконечно большими значениями. Предложенные формулы предназначены для получения символьных схемных функций и откликов непосредственно по схеме с элементами, имеющими предельные параметры, минуя формирование общего (избыточного) выражения с последующим предельным переходом (алгебраическим дифференцированием).

В четвертой главе обсуждается проблема устранения избыточности как в уравнениях Кирхгофа, так и в символьных выражениях, которые формируются на основе этих уравнений. Предлагаются алгоритмы для решения этой проблемы.

1. ПРОБЛЕМА ИЗБЫТОЧНОСТИ В СИМВОЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

До формулирования законов электрического равновесия анализ разветвленных цепей, более сложных, чем «мостик Уитстона», представлял собой непростую задачу [104]. После опубликования Кирхгофом в 1845 году [24] законов электрического равновесия и непрерывности появилась возможность использовать для анализа произвольной электрической цепи достаточно разработанный к этому времени аппарат определителей или метод Гаусса [40, 97].

1.1. ТЕОРИЯ ЦЕПЕЙ НАЧИНАЛАСЬ С СИМВОЛЬНОГО АНАЛИЗА

Два года спустя после опубликования теорем, которые впоследствии стали именовать законами, Кирхгоф, по-видимому, желая сделать процесс получения решения более наглядным и приблизиться к физической сущности поведения анализируемой схемы, предложил метод анализа Z -схем без управляющих связей. Этот метод предусматривает использование непосредственно схемы замещения цепи и не требует предварительного составления ее уравнений. Основным мотивом в разработке топологического метода, очевидно, явились трудности получения символьного решения, связанные с матричными преобразованиями и устранением избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых. Так полтора с лишним века назад был выдвинут схемный подход к анализу электрических цепей.

Дуальный результат для Y -схем опубликовал Максвелл в 1873 году [39]. В литературе по этому поводу обычно называют 1892 год – дату третьего издания знаменитого трактата «Электричество и магнетизм». Работа Максвелла подвела к определению ССФ в виде отношения

$$H = \Delta N / \Delta D, \quad (1.1)$$

где ΔN и ΔD – соответственно числитель и знаменатель ССФ, в которых параметры всех элементов схемы представлены символами. Указанные результаты Кирхгофа и Максвелла не были развиты, если не принимать во внимание их математическую интерпретацию [77], до появления работ Фойснера [82, 83].

Фойснер обратил внимание на трудности построения ССФ с помощью топологических формул Кирхгофа и Максвелла, объяснив в 1902 году, почему они не находят применения у специалистов и отсутствуют в справочниках по физике [82]. Нахождение ССФ по Фойснеру предусматривает разложение определителей исходной схемы и производных от нее схем. Важно, что на каждом шаге расчета приходится иметь дело со схемой, менее сложной, чем исходная схема, а не с абстрактными сочетаниями ветвей исходной схемы.

Так случилось, что схемно-топологическое направление в символьном анализе получило серьезное развитие только за последние полтора десятилетия.

Нельзя сказать, что предыдущие полтора века не были использованы для решения этого вопроса. Напротив, ему были посвящены тысячи журнальных статей, сотни диссертаций и десятки монографий. Оценить объем интеллектуального задела в этой области позволяет изучение обобщающих работ [1, 4, 18, 45, 47, 48, 51, 53, 72, 75, 89, 94].

Неисчерпаемость данной тематики во многом обусловливается поиском ответа на вопрос о предпочтительности того или иного метода. Трудности усугубляются тем, что многие из публикаций дублируют друг друга, используют различный понятийный аппарат, игнорируя терминологию предшествующих работ, бездоказательно декларируют преимущества тех или иных методов и алгоритмов [65]. Всплеск интереса к формированию и использованию символьных выражений проявился во второй половине 20-го века и продолжается до сих пор.

1.2. ПОДХОДЫ К ФОРМИРОВАНИЮ СИМВОЛЬНЫХ СХЕМНЫХ ФУНКЦИЙ

Заглянуть в корень проблемы символьного анализа электрических цепей поможет классификация подходов к формированию ССФ, приведенная в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Классификация подходов к формированию ССФ

Тип подхода	Путь получения ССФ
1. Матричный	Схема – матрица – ССФ
2. Графовый	Схема – матрица – граф – ССФ или схема – граф – ССФ
3. Теоретико-множественный	Схема – матрица – структурное (обобщенное) число – ССФ
4. Схемный	Схема – ССФ

В рамках каждого из подходов в табл. 1.1 можно выделить методы, предусматривающие раздельное нахождение числителя и знаменателя. Эти методы, как правило, реализуют формулу Крамера для решения системы линейных алгебраических уравнений.

Выбор того или иного метода определяется не только трудоемкостью получения ССФ, но и желательной формой ее представления, так как ССФ предназначены в большинстве случаев для многократного применения. Форма представления в свою очередь обуславливает сложность выражений ССФ и тип используемых в них вычислительных операций. Выражения ССФ могут быть развернутыми по Кирхгофу [91] или вложенными (свернутыми и компактными) по Фойснеру [82, 83], избыточными, как уже отмечалось, или свободными от

взаимно уничтожающихся слагаемых, точными или приближенными – применимыми в заданных диапазонах изменения частот и параметров [81].

Приближенные выражения используются в случаях анализа сложных интегральных схем, когда желательно, а иногда и единственно возможно, обойтись без полного выражения ССФ, выполнив его упрощение (аппроксимацию) [81, 89]. Это позволяет представить ССФ таких схем в обозримой форме, резко сократив затраты на символьное моделирование.

Способы представления ССФ. Обычно ССФ записывается в виде единого выражения, символами которого являются только параметры элементов схемы. С точки зрения экономии вычислительных операций бывает удобно представить ССФ в виде последовательных выражений, что достигается введением дополнительных переменных, задающих часто встречающиеся подвыражения в едином выражении [29, 67, 80, 85, 101].

Выражения ССФ могут быть полностью символьными или символьно-численными, в которых символами задается только часть параметров схемы [54, 80]. Та или иная форма представления выражений ССФ зависит от того, используются ли ССФ для аналитических или же только численных исследований.

Требования к алгоритмам формирования ССФ. Исходя из потребностей теории и практики анализа и проектирования электрических цепей на современном этапе, положим в основу сравнения методов формирования ССФ три основных требования: 1) универсальность; 2) вычислительную устойчивость; 3) реализуемость параллельных вычислений.

Под универсальностью понимается применимость метода к широкому классу линейных схем и степень его пригодности для формирования ССФ как в качестве инженерной методики, так и в виде компьютерной программы. Универсальный метод должен обеспечивать получение не только единых выражений, но и последовательностей выражений ССФ, быть удобным для формирования как символьных, так и символьно-численных выражений ССФ.

Требование устойчивости касается свойств выражений ССФ при проведении численных расчетов в случае плохой обусловленности, то есть существенного разброса значений параметров и других численных вырождений, что характерно для реальных электрических цепей. В этом требовании должна предусматриваться возможность формирования выражений ССФ, оптимальных по сложности и числу операций вычитания, которые являются основным источником погрешности при вычислениях с ограниченным числом значащих цифр [38, 80].

Необходимость свертки (желательно оптимальной свертки по Бройеру [54, 79]) обусловлена тем, что свертка выражения приводит не только к уменьшению их сложности, но и к увеличению точности вычисляемого результата [6, 29]. Сокращение сложности выражений ССФ обеспечивает конкурентоспособность символьных методов с численными методами формирования и решения уравнений электрического равновесия.

Третье требование к оптимальному методу формирования ССФ обусловлено высочайшей степенью интеграции современных электрических

цепей, которой неспособна противостоять все возрастающая мощность компьютерной техники. Союзником проектировщиков электро- и радиоаппаратуры являются методы расчета схем делением их на части, а также фундаментальное свойство сложных электрических цепей – разреженность их структуры.

1.3. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В ВИДЕ МАТРИЦ

Как следует из табл. 1.1, всякого рода искусственные построения, будь то матрица схемы, ее граф или структурное число, в определенной степени препятствуют выявлению физической сущности поведения исследуемой схемы, удлиняя путь к ССФ. Математическая формулировка задачи символьного анализа способна затемнить ее суть и привести к размножению вариантов решения, становящемуся самоцелью. Действительно, количество методов и алгоритмов формирования ССФ столь велико, что оно может соперничать с обилием рецептурных приемов, разработанных для решения задачи синтеза электрических цепей. При этом физическая сущность электрической цепи как объекта исследования отодвигается на второй план, а на первом плане возникают уже не электротехнические, а математические трудности, обусловленные издержками соответствующих аппаратов. Основные усилия специалистов приходится направлять на преодоление этих трудностей.

Существующее многообразие матричных методов и координатных базисов для моделирования электрических цепей является скорее бедой, чем благом, поскольку обусловлено необходимостью поместить в «прокрустово ложе» матрицы физическую сущность электрической цепи, содержащей разнообразные элементы. Смешанные контурно-узловые координатные базисы [15] не приобрели популярности вследствие более сложных правил построения матрицы схемы по сравнению с однородными контурным и узловым базисами [38, 49, 50]. Наибольшее распространение получил модифицированный метод узловых напряжений, позволяющий учитывать УИ всех четырех типов и идеальные операционные усилители (ОУ) [38]. Однако искусственное введение токовых переменных в расширенный узловой координатный базис приводит к известным неудобствам при его использовании.

Избыточность матричного подхода заключается в том, что параметр элемента схемы может учитываться в матрице схемы более одного раза. Например, в случае анализа y -схем источником избыточности служит то обстоятельство, что параметры y -ветвей и источников тока, управляемых напряжением (ИТУН), ни один из узлов которых не является базисным узлом схемы, входят в матрицу узловых проводимостей 4 раза: 2 раза – с положительным знаком и 2 раза – с отрицательным.

Избыточность матричных моделей в полном объеме наследуется производными от них теоретико-множественными объектами, поскольку структурное [1] или обобщенное [53] число по сути является сжатой матрицей

схемы. Например, в выражениях ССФ, формируемых на основе обобщенных чисел для у-схемы с ИТУН, присутствуют избыточные слагаемые, обусловленные нерациональным учетом как пассивных, так и активных элементов схемы [53]. Эффективный алгоритм, не связанный с перебором слагаемых, для исключения этих избыточных слагаемых не известен.

1.4. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В ВИДЕ ГРАФОВ

Еще раз напомним, что первый топологический метод, использующий понятия теории графов, которая тогда зарождалась, был разработан Кирхгофом [91]. Он предложил находить ток резистивной цепи с независимыми эдс в виде дроби. Знаменатель ее равен сумме всевозможных сочетаний сопротивлений, удаление которых из цепи не оставляет в ней контуров. Число элементов в таком сочетании равно числу независимых контуров цепи. Числитель также содержит сочетания сопротивлений, но число их на единицу меньше числа контуров, а при удалении любого из них в цепи остается один контур, содержащий ветвь с искомым током. Каждое такое сочетание умножается на алгебраическую сумму эдс, входящих в этот контур. Полученное выражение тока не содержит избыточных слагаемых.

Отсутствуют избыточные слагаемые и при использовании других методов на основе ненаправленного графа пассивной схемы [45, 47, 50, 51]. Однако отображение на графе активных элементов с помощью сигнальных или унисторных дуг неизбежно приводит к ССФ, содержащим избыточные слагаемые. Например, появление таких слагаемых в выражении определителя двунаправленного (унисторного) графа обусловлено тем, что унисторные графы ИТУН содержат дуги как с положительным, так и отрицательным весом [45, 47]. В определителе гибридного графа [57] избыточные слагаемые образуются при отображении источников напряжения, управляемых напряжением (ИНУН), генератор и (или) приемник которых не соединены с базисным узлом схемы, что может иметь место в практической схемотехнике [9]. Оба предыдущих замечания можно отнести также к унисторно-сигнальному графу [55, 60].

Избыточность графов активных подсхем вынуждает искать способы устранения взаимно уничтожающихся слагаемых в процессе формирования ССФ, поскольку, как уже отмечалось, количество избыточных пар слагаемых в выражении определителя графа достаточно сложной схемы может в несколько раз превышать число существенных слагаемых. Это показали эксперименты с программами, реализующими метод унисторного графа [58, 59]. Некоторые способы сокращения количества избыточных слагаемых, рассмотренные в ряде работ, например [76], не приводят к радикальному решению этой проблемы. В общем виде проблема полного исключения избыточных слагаемых для унисторного и унисторно-сигнального графов решается на основе первоочередного выделения параметров пассивных ветвей [55, 61]. Однако при

реализации этого метода на компьютере приходится довольствоваться частичным устранением избыточных слагаемых вследствие высоких вычислительных затрат. Кроме того, используя унисторный граф, принципиально невозможно исключить все избыточные слагаемые в случае отнесения дуг, отображающих некоторый ИТУН, к различным подсхемам [61].

Подобно матричным моделям, существенным недостатком графовых моделей схем является ограниченный набор типов пассивных элементов и УИ. Это способствовало и способствует «размножению» модификаций топологических формул, ориентированных на те или иные типы элементов схемы. Ценность известных методик значительно снижает наличие каких-либо ограничений в базисе элементов, подлежащих учету. Графы нерегулярных для выбранного базиса УИ обладают, как правило, еще большей избыточностью, что является «ахиллесовой пятой» всех до сих пор разработанных обобщений. Этого недостатка лишен обобщенный унисторный уз-граф, на котором предусматривается отображение нерегулярных УИ «унисторо-подобными» элементами [63]. Однако платой за такую возможность является необходимость рассмотрений

2^n производных графов (n – число нерегулярных УИ) и говорить об эффективности компьютерной реализации не приходится.

Элементы матрицы схемы, равные нулю, не отображаются на графе схемы, что важно для электрических цепей, которым присуща разреженность структуры. Исходной посылкой для разработки теоретико-множественного подхода (третья строка табл. 1) также служило желание учесть это свойство электрических цепей, но не путем наглядного изображения ненулевых элементов матрицы схемы, а посредством списочного хранения этих элементов и организации работы только с ненулевыми элементами [71]. Такое усовершенствование матричного подхода в большей степени ориентировано на машинные выкладки, чем на использование человеком, поскольку применяется тяжеловесный теоретико-множественный аппарат и операция декартова произведения множеств [1, 53].

1.5. ИЗБЫТОЧНОСТЬ И ОТСУТСТВИЕ НАГЛЯДНОСТИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ЦЕПЕЙ

Формирование ССФ с помощью матриц и графов значительно усложняется в случае схем с различными типами УИ, что поставило под сомнение привлекательность символьных методов для проектировщиков электрических цепей. Действительно, главными достоинствами символьно-топологических методов изначально являлись наглядность и удобство в применении [4]. Методическая ценность матричного подхода к формированию ССФ оказывается более низкой, чем графового подхода, так как работа с символьными таблицами – занятие существенно более изнурительное, чем работа с числовыми матрицами. Преобладающая за рубежом тенденция к повышению эффективности компьютерных реализаций матричного и

графового подходов [89] приводит к тому, что алгоритмы оказываются, как правило, слишком сложными в освоении и трудоемкими в использовании при исследовании простых схем. Однако каждому обладателю компьютерной программы вывода ССФ желательно владеть эффективной методикой символьного анализа (точно также как владельцу калькулятора, чтобы не попасть впросак, полезно знать таблицу умножения).

Матрицы и графы, выступая в роли посредников, требуют за свои услуги существенно более высокой платы, чем снижение методической ценности соответствующих алгоритмов формирования ССФ. Основной недостаток матричных и графовых представлений – их избыточность – приводит к тому, что количество избыточных слагаемых увеличивается экспоненциально с усложнением схемы, препятствуя формированию компактных ССФ и уменьшая сложность анализируемых схем.

Погрешность расчетов на основе избыточных ССФ может оказаться недопустимо высокой или привести к полному искажению результата, о чем пользователь компьютера может и не подозревать [38]. Неприятности избыточные слагаемые доставляют при получении приближенных ССФ, значительно снижая надежность соответствующих программ символьного анализа [81]. Важно подчеркнуть, что неустранимая погрешность возникает уже на этапе построения матрицы схемы, поскольку вычисление ее элементов проводится с конечным числом значащих цифр [38]. Это относится не только к численному, но и к символьному анализу, так как элементы матриц будут вычисляться перед проведением других операций в выражениях ССФ.

Особенности преподавания символьного анализа электрических цепей. Важное место ССФ занимают в подготовке специалистов по электротехнике и радиотехнике [49, 50]. При этом в традиционных курсах по теории электрических цепей основную нагрузку несут методы контурных токов и узловых напряжений. Это препятствует полной реализации возможностей аналитического представления зависимостей, поскольку вначале приходится объяснять студенту правила построения уравнений, а затем ему предстоит их решить по Крамеру или по Гауссу. Типична ситуация, когда молодой специалист вместо того, чтобы немедленно записать ССФ простейшей схемы непосредственно по ее виду, начинает составлять для нее уравнения по методу узловых напряжений или контурных токов. Если параметры схемы заданы как проводимостями, так и сопротивлениями, то ее обычно начинают приводить к однородному базису, выбирая тем самым более трудоемкий путь решения задачи. Наличие в схеме УИ, отличных от ИТУН или ИНУТ, как правило, приводит в замешательство.

В то же время применение графового подхода для получения ССФ следует признать недостаточно эффективным в обучении, о чем свидетельствует тенденция к выведению соответствующих методик за рамки учебных курсов. Это объясняется необходимостью освоения утомительных комбинаторных методик перечисления различных топологических объектов.

1.6. МЕТОД СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

В основу метода положены формулы Фойснера для выделения параметров [82, 83]. Это позволило разработать схемный подход (четвертая строка табл. 1), который обеспечивает наиболее короткий путь к ССФ, минуя построение вспомогательных математических моделей в виде уравнений, матриц, графов или теоретико-множественных объектов [14, 72]. К числу более или менее эффективных методик, реализующих схемный подход, можно отнести результаты Брауна [78], Партена и Сикета [99], Хашемяна [90]. Браун придал направление ненаправленному нуллору Теллегена [102], что позволило применить единую процедуру для нахождения числителя и знаменателя ССФ [78]. Это было только одно из многочисленных применений нуллора [93], которое пока еще не всеми оценено по достоинству.

Применение метода схемных определителей снимает вопросы учета избыточности и разреженности структуры электрических цепей, поскольку задание схемы списком ее элементов с указанием узлов подключения является не только исходной, но и рабочей информацией. Следует подчеркнуть, что в случае пассивных электрических цепей без взаимных индуктивностей графовый и схемный подходы отождествляются, поскольку ненаправленный граф схемы по существу является ее упрощенным изображением, а не математической моделью.

Метод схемных определителей получил такое название [70], был переработан и развит в течение истекших полутора лет [8, 9, 12, 16, 32–37, 42, 43, 68–70, 86–88].

Метод нуллорных схем. Схемный подход позволил разработать безыбыточный метод анализа электрических цепей по частям – метод нуллорных схем [26, 31]. В этом методе объединение подсхем осуществляется с помощью схемно-алгебраических формул (САФ). САФ подсхемы – это нуллорно-весовое выражение определителя подсхемы, которое представляет собой сумму произведений определителей нуллорных схем на соответствующие весовые коэффициенты в виде рациональных выражений из параметров элементов подсхемы. Нуллорной схемой называют схему, содержащую только нуллары и идеальные проводники. САФ получается путем выделения всех элементов подсхемы при фиксированных полюсах, которые в дальнейшем используются для объединения подсхем.

Объединение подсхем осуществляется попарно на основе декартова произведения множеств нуллорных схем объединяемых подсхем. Пара нуллорных схем совместима и образует нуллорную схему объединенной подсхемы, если определитель объединенной нуллорной схемы невырожден. Весовой коэффициент объединенной нуллорной схемы получается как произведение весовых коэффициентов объединяемых нуллорных схем.

Объединение подсхем осуществляется до тех пор, пока не получится САФ исходной схемы. Искомая схемная функция формируется, как и обычно в методе схемных определителей, в виде отношения определителей схем числителя и знаменателя. Определителем схемы числителя является САФ

исходной схемы с подключенным к соответствующим полюсам нулором. Определитель схемы знаменателя находится из той же САФ путем нейтрализации независимого источника и приемника. Метод позволяет получить безыбыточное выражение схемной функции, поскольку САФ каждой подсхемы формируется методом выделения параметров, не создающим избыточных слагаемых.

Подробные сравнительные решения примеров различными методами можно найти в [27, 30]. Следует отметить, что в случае схем, образованных из двухполюсных элементов Р. В. Дмитришиным было найдено решение по частям, лишенное взаимно уничтожающихся слагаемых, на основе метода d -деревьев [17]. Метод нулорных схем можно рассматривать как обобщение метода d -деревьев для схем с произвольными активными элементами.

О дополнительных возможностях символьных матричных методов. Критические замечания в адрес методов, реализующих матричный, графовый и теоретико-множественный подходы, не означают принижения значения этих методов. Напротив, изучая работы зарубежных исследователей последних 10–20 лет, можно прийти к мысли, что значительному продвижению в области компьютерного символьного моделирования мы обязаны использованию математических аппаратов матриц и графов [80, 81, 89, 94, 101].

Несмотря на свое совершенство, МСО требует большее время на освоение по сравнению с методами построения уравнений электрического равновесия. Доводом в пользу изучения матричных методов служит то обстоятельство, что численные методы решения уравнений преподаются ранее в математических дисциплинах. Наконец, как показывают последние исследования, возможности матричных методов для формирования компактных ССФ еще не исчерпаны.

1.7. НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ СИМВОЛЬНОГО АНАЛИЗА

Возврат на позиции схемного подхода, с которых начиналось аналитическое исследование электрических цепей Кирхгофом, Максвеллом и Фойснером, привело к получению новых результатов, расширяющих применение ССФ в диакопике, диагностике и структурном синтезе электрических цепей [9, 12, 32, 33, 35, 36]. Между тем, до сих пор не было уделено пристального внимания самым первым результатам в области символьного анализа, принадлежащим классикам электротехники. Несмотря на давность получения этих результатов, еще не исследованы все пути для совершенствования и обобщения топологических правил. Не была изучена взаимосвязь первых топологических правил с методом схемных определителей.

Открытыми остаются вопросы улучшения изложения оснований метода схемных определителей, повышения логичности исходных положений и методик, реализующих этот метод применительно к тому или иному классу цепей и роду задач. Изложение должно целиком базироваться на понятиях «вырождение схемы» и «нейтрализация элемента», которые являются центральными понятиями МСО, но отсутствуют в традиционных курсах ТОЭ.

Желательно, чтобы формулы МСО не применялись формально, а могли быть сравнительно легко получены теми, кто использует МСО.

К настоящему времени в литературе не обсуждалась расширенная версия МСО, предусматривающая анализ электрических цепей, содержащих параметры, которые имеют бесконечно большие значения. Между тем на практике оценочные расчеты с устремлением параметров некоторых элементов к бесконечности широко применялись с самого зарождения теории электрических цепей. Например, на предельном переходе построена реконструкция первого и второго топологического правила Кирхгофа [20, 21]. Вероятно, что именно так рассуждал Кирхгоф, когда обосновывал свой метод. При символьном анализе важно избежать трудоемкого анализа схемы при конечных значениях параметров элементов и последующего алгебраического дифференцирования.

Наконец, до сих пор глубоко не исследована природа возникновения избыточности при построении уравнений по законам Кирхгофа и механизм образования взаимно уничтожающихся слагаемых в разложениях соответствующих определителей. Ответы на эти вопросы могут позволить этим классическим уравнениям занять достойное место в теории электрических цепей.

2. КЛАССИЧЕСКИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ

Топологические правила [24, 91] стали реакцией Кирхгофа на несовершенство математических методов для решения уравнений электрических цепей и непригодность этих методов для получения решения в аналитическом (символьном) виде. Три топологических правила в статье [91] приведены после формулировки теорем, которые были опубликованы Кирхгофом двумя годами раньше (в 1945 году) и получили впоследствии название «законов Кирхгофа». Характерно, что Кирхгоф первым привел теорему о равновесии напряжений в контуре, а не теорему о непрерывности токов в узле (сечении). Это сделано им не случайно, поскольку приведенные следом три топологических правила опираются на понятие «замкнутой фигуры» – контура. На авторское нарушение принятого сейчас порядка следования законов было указано И. В. Ероховым [19].

По существу в статье [91] приводятся пять правил: два правила-закона, третье правило для нахождения знаменателя отклика, четвертое и пятое правила предназначены для нахождения числителя отклика двумя различными способами. Последние три правила называются топологическими, поскольку позволяют получить решение – искомый отклик непосредственно по виду (структуре, топологии) схемы. Неслучайно за рубежом была принята порядковая нумерация результатов Кирхгофа, в соответствии с которой топологические правила были названы «третьим и четвертым правилами Кирхгофа» [103]. Так случилось, что пятое правило, сформулированное в конце статьи [91] не было замечено специалистами – не вошло в обзорные статьи, монографии и учебники, что впоследствии привело к многочисленным повторным опубликованиям результатов Кирхгофа или их незначительных модификаций [2, 73, 74, 45, 100].

2.1. ИЗБЫТОЧНОСТЬ СИМВОЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Избыточность ССФ – как проблема символьного анализа. При раскрытии символьного определителя матрицы электрической цепи, построенной относительно токов ветвей [24, 91], как правило, образуется большое количество избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых. При использовании метода контурных токов, по свидетельству Флеминга предложенного Максвеллом в своей последней университетской лекции [82], число избыточных слагаемых увеличивается. Такие слагаемые появляются в контурном определителе независимо от выбора системы контуров, поскольку в любой матрице контурных сопротивлений имеются квадратные миноры, начиная со второй степени, содержащие одинаковые слагаемые с противоположными знаками.

Одним из основных критериев предпочтительности использования метода является степень избыточности формируемых символьных выражений. Под

избыточностью понимают наличие в формируемых выражениях взаимно уничтожающихся слагаемых. Такие слагаемые не только усложняют ССФ, поскольку избыточных слагаемых часто больше, чем действительных слагаемых, но и снижают точность вычислений, поскольку приводят к вычитанию близких по модулю величин [38, 80].

Избыточность символьных вычислений при анализе электрических цепей матричными методами детально проанализировал Фойснер в 1902 году [82]. Им было установлено, что при анализе z -схемы путем разложения символьного определителя матрицы, построенной по законам Кирхгофа относительно токов ветвей [24, 91], образуется большое количество избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых. Иллюстрируя это положение, Фойснер построил для классической схемы Кирхгофа на рис. 2.1 следующую матрицу [82]

	1	2	3	4	5	6
1	Z_1	$-Z_2$	Z_3			
2			Z_3	$-Z_4$	Z_5	
3		Z_2		$-Z_4$		Z_6
4	1	1				-1
5				1	1	1
6	-1		1		-1	

(2.1)

где строки 1, 2, 3 и 4, 5, 6 относятся к уравнениям баланса напряжения и тока соответственно.

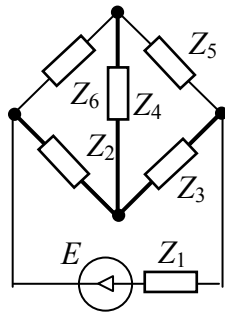


Рис. 2.1. Схема Кирхгофа: дерево, выбранное Фойснером для построения уравнений баланса напряжений и токов, выделено жирной линией

Определитель матрицы (2.1), раскрытый традиционным путем по первой строке, имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Delta = & Z_1 \{ -Z_2 [Z_3 + Z_4 + Z_5] - [Z_4 Z_6 + Z_5 (Z_4 + Z_6)] - [Z_3 (Z_4 + Z_6)] \} + \\
 & + Z_2 \{ -[Z_4 Z_6 + Z_5 (Z_4 + Z_6)] - [Z_3 (Z_4 + Z_6)] - [-Z_3 Z_4] \} + \\
 & + Z_3 \{ -[Z_2 Z_4] - [Z_4 Z_6 + Z_5 (Z_4 + Z_6)] - [Z_2 (Z_4 + Z_5)] \}, \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

где в фигурных, квадратных и круглых скобках приведены выражения миноров пятого, четвертого и третьего порядка соответственно.

В формуле (2.2) – 2 пары избыточных слагаемых $\pm Z_2Z_3Z_4$, чтобы найти и исключить их, необходимо развернуть все выражение и провести проверку двадцати слагаемых на совпадение. Для этого нужно выполнить 190 операций сравнения трехзначных чисел.

По методу контурных токов, предложенному Максвеллом [39], число избыточных слагаемых еще больше [82]. Такие слагаемые появляются в контурном определителе независимо от выбора системы контуров, поскольку в любой матрице контурных сопротивлений имеются квадратные подматрицы, по крайней мере, второго порядка, содержащие одинаковые по модулю параметры во всех четырех ячейках. Определитель такой подматрицы (минор) содержит пару взаимно уничтожающихся слагаемых, а соответствующее ему алгебраическое дополнение не является нулевым.

Так, по методу контурных токов выражение для определителя схемы на рис. 2.1 имеет вид

$$\Delta = (Z_2 + Z_4 + Z_6)[(Z_3 + Z_4 + Z_5)(Z_1 + Z_2 + Z_3) - Z_3^2] + \\ + Z_4[-Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3) - Z_2Z_3] - Z_2[Z_3Z_4 + Z_2(Z_3 + Z_4 + Z_5)].$$

Последняя формула тождественна выражению (2.2), однако содержит значительно большее число избыточных слагаемых – 22, что даже больше числа действительных слагаемых, которых – 16. При этом для их исключения требуется 703 операции пересечения множеств.

Избыточные слагаемые образуются также при раскрытии символьных определителей и в дуальных матричных методах напряжений ветвей и узловых напряжений. Избыточность матричных методов способствовала во многом разработке других более экономичных методов символьного анализа.

Итак, избыточные слагаемые образуются при раскрытии символьных определителей и в дуальных методах напряжений ветвей и узловых напряжений. Искомые символьные схемные функции и отклики получаются при этом по методу *Крамера* [40, 49] путем разложения по *Лапласу* определителей и алгебраических дополнений. Вследствие высокой избыточности матричных уравнений такой подход приводит к излишним вычислительным затратам и может повлечь увеличение погрешности вычислений при расчете по сформированным выражениям.

2.2. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА КИРХГОФА

Наиболее кратко ток или напряжение j -й ветви ЛЭЦ записывается через матричное решение методом *Крамера* системы уравнений, составленной по законам *Кирхгофа*,

$$O_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad (2.3)$$

где O_j – символьное выражение отклика (СВО); Δ – определитель матрицы параметров системы уравнений; Δ_j – определитель матрицы параметров, в которой j -й столбец заменен на матрицу-столбец правой части системы уравнений. Далее, для краткости, будем называть матрицы, определители которых равны, соответственно, Δ и Δ_j , матрицей знаменателя и матрицей числителя соответственно. В частном случае, когда выполняется разложение определителя матрицы числителя по элементам j -го столбца, СВО получается в виде

$$O_j = \sum_{i=1}^n F_{ji} x_i, \quad (2.4)$$

где i, j – номера ветвей, содержащих источники воздействия и приемники откликов соответственно; x_i – напряжение или ток соответствующего источника воздействия с номером i ; F_{ji} – схемная (передаточная от ветви i к ветви j) функция; n – число независимых источников в схеме. Переменные O_j, F_{ji}, x_i представлены в комплексной или операторной форме для анализа цепи в установившемся гармоническом или переходном режимах соответственно.

Выражение (2.4) является классической формулировкой принципа наложения, который положен в основу анализа не только ЛЭЦ с несколькими источниками воздействия, но и произвольных линейных систем [50]. Представление ЛЭЦ цепи в виде многополюсника, заданного схемными функциями, оказалось столь плодотворным, что применение общего выражения (2.3) и любые другие способы разложения определителя матрицы числителя не получили широкого распространения.

В соответствии с формулой (2.4) общая реакция схемы на приемнике напряжения или тока находится путем вычисления реакций каждого отдельно взятого источника и последующего алгебраического суммирования этих реакций. При этом источники, не участвующие в порождении некоторого отклика, исключаются из схемы в соответствии с их физическими свойствами, то есть источники напряжения стягиваются, а источники тока удаляются.

В выражении (2.4) слагаемые числителя (знаменатель у всех ССФ общий) сгруппированы при параметрах независимых источников, то есть явно. Учитывая это, далее принцип наложения в формулировке (2.4) будем называть явным. Как будет показано ниже, еще *Кирхгоф* в своем (исторически первом) топологическом методе [91] применял группировку слагаемых числителя Δ_j относительно произведений сопротивлений схемы, соответствующих ее деревьям. При этом параметры независимых источников появлялись в формируемом СВО многократно, то есть неявно. В матричной интерпретации это соответствует разложению определителя матрицы числителя (2.3) по элементам, выбираемым произвольно. Недостатком явного принципа наложения является необходимость построения при его использовании n числителей схемных функций, что препятствует формированию компактных и

оптимальных по числу вычислительных операций выражений искомым СВО [34, 56].

В 1847 году Кирхгоф первым обратил внимание на избыточность уравнений, составленных по правилам (законам) сформулированным им двумя годами раньше [91]. Основателя теории цепей не удовлетворяло то обстоятельство, что использование традиционного математического аппарата приводит к избыточным вычислениям. Кирхгоф предложил принципиально новый – топологический метод, приводящий к «чистому» решению, для этого был разработан прямой метод анализа электрических цепей, исключающий составление уравнений и использующий непосредственно схемную модель цепи.

Метод Кирхгофа предназначался для нахождения тока в I_λ в схеме с m узлами, образованной n сопротивлениями $w_1, w_2, \dots, w_\lambda, \dots, w_n$ и содержащей источники эдс E_1, E_2, \dots, E_n . Ключевой константой метода является число независимых контуров схемы, которое рассчитывается по формуле $\mu = n - m + 1$. Контур Кирхгофа называл «замкнутой фигурой».

В начале своей статьи Кирхгоф сформулировал два правила для анализа электрической схемы, названных им теоремами (теперь их называют законами Кирхгофа). «Итак, законы Кирхгофа впервые предлагалось применить для математического описания фантастически сложной электрической цепи» [21, с. 25]. В оригинале [91] правила не нумеруются, но здесь нумерация необходима для обсуждения. Во избежание путаницы нумерация топологических правил будет продолжать нумерацию правил-законов [24, с. 171–178].

Правило 3 для знаменателя (контурного определителя). «Общий знаменатель всех величин I равен сумме сочетаний из w_1, w_2, \dots, w_n по μ элементов $w_{k_1}, w_{k_2}, \dots, w_{k_\mu}$, обладающих тем свойством, что после исключения проводников k_1, k_2, \dots, k_μ в них не остается ни одной замкнутой фигуры».

Правило 4 для числителя – неявный принцип наложения. «Числитель величины I_λ равен сумме сочетаний из w_1, w_2, \dots, w_n по $\mu - 1$ элементов $w_{k_1}, w_{k_2}, \dots, w_{k_{\mu-1}}$, обладающих тем свойством, что после исключения проводников $k_1, k_2, \dots, k_{\mu-1}$ в них остается одна замкнутая фигура; каждое сочетание умножается на сумму электродвижущих сил, которые приложены к проводникам, образующим соответствующую замкнутую фигуру. При этом электродвижущие силы считаются положительными в том же направлении, что и I_λ ».

В конце статьи Кирхгоф сформулировал третье (по порядку изложения) топологическое правило [24, с. 177], которое до сих пор остается неизвестным ряду исследователей, что порождает «открытие» «новых» методик [2, 73, 74].

Правило 5 для числителя – традиционный принцип наложения. «Если упорядочить члены числителя величины I_λ по величинам E_1, E_2, \dots, E_n , то коэффициент при E_k окажется суммой взятых частью со знаком «плюс», частью со знаком «минус» сочетаний из w_1, w_2, \dots, w_n по $\mu - 1$ тех элементов, которые входят в знаменатель величин I , умноженные как на w_λ , так и на w_k . Именно эти сочетания $w_{k_1}, w_{k_2}, \dots, w_{k_{\mu-1}}$ обладают тем свойством, что после удаления проводников $k_1, k_2, \dots, k_{\mu-1}$ остается только одна замкнутая фигура, и что в эту

фигуру входят и проводник λ , и проводник k . Сочетание $w_{k_1}, w_{k_2}, \dots, w_{k_{\mu-1}}$ следует брать со знаком «плюс», если в остающейся фигуре положительное направление I_λ совпадает с направлением электродвижущей силы E_λ , и со знаком «минус» в противном случае».

В основе топологических методов и теории электрических цепей лежат базовые положения теории графов, которые использовал физик Кирхгоф до ее основания как математической дисциплины. Электрические схемы, как и графы, характеризуются, прежде всего, структурой. Дерево – один из центральных объектов теории графов и теории цепей – обладает тремя свойствами: 1) содержит $m-1$ ветвь; 2) не имеет циклов; 3) связно, то есть не имеет изолированных компонент [7]. Любые два свойства определяют дерево.

В правиле 3 Кирхгоф использует первое и второе свойства. Первое свойство применяется для генерации сочетаний из числа ветвей схемы, а второе свойство – для проверки на соответствие этих сочетаний дополнениям деревьев.

Схема, дополнения деревьев которой находятся для раскрытия контурного определителя, получается из исходной схемы в результате стягивания источников напряжения и приемников тока. По образованной схеме находится характеристический полином – знаменатель схемной функции или отклика, поэтому эта схема нередко так и называется – «схема знаменателя». Определитель схемы знаменателя является характеристическим полиномом.

В соответствии с правилом 5 знаменатель отклика используется для получения слагаемых числителя, которые суммируются перед умножением на E_k . При этом требуется сортировка слагаемых знаменателя по признаку наличия в них ветвей w_λ или w_k для нахождения пересечения этих множеств. Слагаемые, входящие в пересечение, образуют искомым сомножитель при E_k .

Таким образом, правило 5 предусматривает получение отклика в явной форме относительно параметров эдс. Это классическая формулировка принципа наложения (суперпозиции), предусматривающего группировку слагаемых числителя по параметрам независимых источников. При неявной форме принципа наложения, параметры независимых источников появляются более одного раза, то есть схемные функции, участвующие в создании отклика не выражены явно [5].

При использовании неявного принципа наложения (правило 4 или совместное применение правил 4 и 5) выражение числителя получается, особенно при небольшом числе источников, менее компактным. Это обусловлено тем, что слагаемые знаменателя рассматриваются по отдельности и умножаются на алгебраическую сумму эдс, то есть, в отличие от явной формы представления числителя, в неявной форме параметр каждой эдс используется не оди́н раз, а многократно [34].

Известно, что неявный принцип наложения дает для схем с большим числом источников более компактные выражения – содержащие по сравнению явным принципом меньшее число арифметических операций. Это объясняется тем, что при неявном методе сокращается число раскрываемых миноров, а

также могут быть сгруппированы слагаемые, которые являются общими для различных НИ [34]. Для развернутых выражений по Кирхгофу это проявляется не так существенно. Так для схемы Кирхгофа на рис. 2.1 полученные с помощью правил Кирхгофа формулы для числителя тока 6-й ветви в неявной и явной форме имеют вид соответственно

$$I_6 = R_1 R_5 (E_2 + E_4 - E_5) - R_3 R_4 (E_2 + E_4 - E_5) + R_5 R_2 (E_1 + E_4 - E_6) + R_5 R_3 (E_1 + E_4 - E_6) + \\ + R_3 R_2 (E_1 + E_4 - E_6) + R_3 R_4 (E_1 + E_4 - E_6) + R_1 R_2 (E_3 + E_5 - E_6) + R_1 R_4 (E_3 + E_5 - E_6) + \\ + R_1 R_5 (E_3 + E_5 - E_6) + R_2 R_4 (E_3 + E_5 - E_6); \quad (2.5)$$

$$I_6 = [R_5 R_2 + R_5 R_3 + R_3 R_2 + R_3 R_4] E_1 + (R_5 R_1 - R_3 R_4) E_2 + [R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_1 R_5 + R_2 R_4] E_3 + \\ + [R_5 R_1 + R_5 R_2 + R_5 R_3 + R_2 R_3] E_4 + [R_4 R_1 + R_4 R_2 + R_4 R_3 + R_1 R_2] E_5 - \\ - [R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_1 R_5 + R_3 R_2 + R_3 R_4 + R_3 R_5 + R_2 R_4 + R_2 R_5] E_6. \quad (2.6)$$

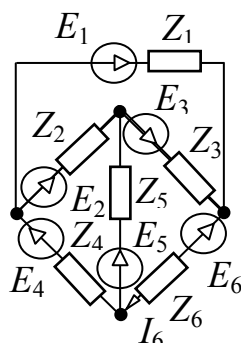


Рис. 2.2. Классическая четырехузловая схема Кирхгофа

Полученные выражения в неявной (2.5) и явной (2.6) форме содержат 20 и 32 умножения, и 29 и 25 аддитивных операций соответственно. Выражение (2.5) содержит существенно меньше операций умножения – наиболее трудоемких операций. С точки зрения компактности эти выражения неразличимы – содержат одинаковое количество символов. Однако неявная форма не имеет резерва свертки. В неявной форме лишние 12 умножений легко устраняются сверткой внутри квадратных скобок.

Достоинством неявной формы является то, что не требуется находить пересечение множества слагаемых знаменателя, содержащих параметр w_λ , и множества слагаемых знаменателя, имеющих сомножителем параметр w_k . Правило 5 предполагает выбор тех слагаемых знаменателя, которые содержат ветвь с искомым током w_λ . Важно, что эти слагаемые могут оказаться в числителе только при исключении этой ветви из числа сомножителей. Это вытекает из того, что согласно правилу 4 ветвь w_λ не должна удаляться из схемы (для образования контура, проходящего через источники эдс и ветвь с искомым током).

Для нахождения тока в схеме с источниками тока сопротивление w_λ заменяется идеальным проводником. Числитель находится точно так же, как

числитель в схеме с источниками напряжения, поскольку числители всех передаточных функций одинаковы, а различие заключается в знаменателях. Дуальные формулировки лишены эвристического характера, поскольку получаются формальной заменой понятий на основе принципа дуальности [22].

При однородных воздействиях и откликах все слагаемые числителя обязательно входят в знаменатель, поэтому «заготовку» для выражения числителя (то есть «копию» выражение знаменателя) можно записать заранее [73], но в этом общем выражении будет много нулевых слагаемых. В силу правила 5 можно существенно сократить число нулевых слагаемых в числителе, если записывать в него только слагаемые знаменателя, содержащие параметр ветви с искомым откликом (для схемы с сопротивлениями) или не содержащие этого параметра (для схемы с проводимостями).

Кирхгоф находит ток I_γ в случае, когда последовательно с источником E_k включен проводник с сопротивлением w_k , а последовательно с искомым откликом – проводник с сопротивлением w_λ . Если проводнику λ задать сопротивление, равное бесконечности и удалить слагаемые знаменателя, не содержащие w_λ как бесконечно малые, то искомым откликом станет не ток, а напряжение.

Кирхгоф предложил алгоритм перечисления деревьев (дополнений деревьев), использующий перебор сочетаний с последующей проверкой на достаточные свойства дерева. Этот алгоритм считается самым трудоемким. Наиболее простым и эффективным признан алгоритм [96], основанный на выделении ветвей по формуле Фойснера (для проводимостей) [92].

Как уже указывалось, правило 5 Кирхгофа, помещенное в конце статьи, оказалось незамечено специалистами [103]. Объектами внимания и развития стали третье и четвертое правила, которое даже назвали «третьим и четвертым правилами Кирхгофа» (будто бы он внес в теорию цепей только четыре правила!). Поскольку нумерация правил продолжает нумерацию законов Кирхгофа, то топологическим правилам присваивается высокий научный статус. Это позволяет не путать эти правила с законами электрического равновесия – законами Кирхгофа, которые нередко также называют правилами.

Трудности восприятия статьи [91], а также малый тираж ее русского перевода [24] обусловили многочисленные повторы – открытие заново правил 4 и 5 вплоть до последнего времени [28, 44]. До сих пор квалифицированные специалисты затрачивают годы жизни на повторение результатов Кирхгофа, изложенных в статье [91], хотя она была без сокращения переведена на русский язык [24]. В числе причин этого может быть «эстетическая притягательность» топологического анализа, которая скрывается за «емкой краткостью» формулировок классика. За век с лишним было немало популяризаций третьего и четвертого правил Кирхгофа, например [4,77]. Топологический метод Кирхгофа, как и разработанные на его основе методики, отражают научный уровень середины 19 века и практического значения не имеют, но до сих пор применяются в учебном процессе [74].

Будет уместно привести комментарий И. В. Ерохова [21, с. 33] о знаменитой статье [91], написанной 23-летним Кирхгофом: «Материал статьи

[91] изложен очень плохо. Возникает такое ощущение, что оригинал был написан на санскрите, а потом был переведен на европейские языки. Мы знаем, что это не так, что немецкий язык, которым владел автор, не сильно отличается от современного языка, поэтому объясняем синтаксические трудности желанием решить задачу в общем виде. Искусственные рамки, в которые поставил себя сам ученый, вынуждали его доводить буквально до мумифицированного вида любой тезис статьи. Именно этим, на наш взгляд, объясняется длительное пребывание работы [91] в запасниках научных достижений. Только Дж. К. Максвелл, имея опыт расшифровки рукописей М. Фарадея, сумел почти через 50 лет понять суть работы».

2.3. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА МАКСВЕЛЛА

Гений Максвелла не мог пройти мимо проблемы избыточности в символьном анализе электрических цепей. В приложении к шестой главе («Линейные электрические токи») части 2 («Электрокинематика») знаменитого трактата [39, с. 329–331] на двух страницах текста дается ряд топологических правил (без указаний на статью Кирхгофа [91]). Правила Максвелла дуальны правилам Кирхгофа и применяются к схемам, образованным проводимостями, но заслуживают того, чтобы привести их дословно.

В качестве базисного узла выбирается узел с наибольшим номером n . Сначала Максвелл ввел понятие, как теперь принято говорить, передаточного сопротивления.

Передаточное сопротивление. «Пусть потенциал одной из точек, скажем точки A_n , принят за нуль. Тогда... если в точку A_s притекает количество электричества Q_s , потенциал в точке A_p равен $(D_{ps}/D)Q_s$ ».

Правило для знаменателя. «Величина D равна сумме произведений проводимостей, причем каждое произведение содержит $(n-1)$ сомножитель и не принимаются во внимание такие произведения, которые содержат проводимости ветвей, образующих замкнутые контуры».

Максвелл, так же как и Кирхгоф, дал два правила для нахождения числителя.

Правило для числителя. «Величина D_{ps} равна сумме произведений, составленных каждое из $(n-2)$ сомножителей, причем не учитываются такие произведения, которые содержат проводимости ветвей $A_p A_n$ или $A_s A_n$, а также такие, в которые входят проводимости ветвей, образующих либо сами по себе, либо с помощью ветвей $A_p A_n$ или $A_s A_n$ замкнутые контуры».

Далее Максвелл обосновывает преобразование электродвижущей силы E_{qr} , действующей в ветви $A_q A_r$, в источник тока величины $K_{qr} E_{qr}$ (K_{qr} – проводимость ветви $A_q A_r$), то есть возможность применения предыдущих правил для нахождения передаточной функции по напряжению.

Действительно, с учетом проводимости K_{qr} источник тока $K_{qr} E_{qr}$ оказывается подсоединенным к той же самой схеме, поэтому потенциал в точке

A_p будет равен $(K_{qr}D_{ps}/D)E_s$. Знаменатель не изменится, а слагаемые числителя будут отличаться только множителем K_{qr} .

Максвелл, как и Кирхгоф, не нумеровал предложенные правила, это не потребуется и нам. В своей работе Максвелл не упоминает топологические правила Кирхгофа, ограничиваясь ссылкой на его теоремы (законы). Вместе с тем, первые два топологических правила Максвелла двойственны третьему и пятому правилам Кирхгофа.

Оригинальность Максвелла проявилась, прежде всего, в том, что он в отличие от Кирхгофа считал достаточным рассмотрение схемы с единственным источником тока или напряжения, то есть предлагал топологические правила для нахождения числителя и знаменателя схемной функции.

Преыдущие правила Максвелла дуальны более общим третьему и пятому правилам Кирхгофа, но Максвелл пошел дальше – он усовершенствовал дуальный вариант пятого правила, предложив группировку слагаемых числителя по их знаку.

Правило для числителя с отдельным нахождением положительных и отрицательных слагаемых. «Если электродвижущая сила E_{pq} действует вдоль проводника A_pA_q , то величина тока, возникающего при этом в другом проводнике A_rA_s , равна $K_{rs}K_{pq}(\Delta/D)E_{pq}$, где D вычисляется по указанному выше правилу, а $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$.

Тогда Δ_1 вычисляется следующим образом: составим из проводимостей всевозможные произведения, содержащие $(n-2)$ множителей. Выберем из этих произведений такие, которые содержат как проводимость ветви A_pA_r (или произведение проводимостей тех ветвей, которые вместе с A_pA_r образуют замкнутый контур), так и проводимость ветви A_qA_s (или произведение проводимостей тех ветвей, которые вместе с A_qA_s образуют замкнутый контур). Из выбранных таким образом произведений отбросим те, которые содержат A_rA_s или A_pA_q , или же произведения проводимостей тех ветвей, которые образуют замкнутые контуры либо сами по себе, либо с помощью A_rA_s или A_pA_q . Сумма оставшихся членов даст выражение для Δ_1 . Величина Δ_2 получается по тому же способу, только вместо ветвей A_pA_r и A_qA_s следует брать ветви A_pA_s и A_qA_r соответственно».

Это правило сводит нахождение числителя к перечислению слагаемых, содержащих проводимости, которые образуют на схеме контуры, включающие как независимый источник, так и ветвь с искомым током. При этом слагаемые из Δ_1 соответствуют контурам, в которых ориентация источника и отклика совпадает. Для слагаемых из Δ_2 имеет место обратное.

Принципиальное преимущество топологических формул Фойснера от правил Кирхгофа и Максвелла заключается в том, что построение развернутых символьных выражений для откликов или схемных функций по Кирхгофу (Максвеллу) невозможно для анализа практических схем. Например, в полной схеме с шестью узлами и 15 ветвями (каждая пара узлов соединена ветвью) имеется 1296 деревьев. Это послужило распространению утверждений, что символьный анализ ограничивается простейшими схемами в 5–10 узлов и

элементов, что было закреплено даже в энциклопедии «История электротехники» [23].

Однако это не так. Вынесение за скобки общих множителей – свертка или факторизация [79] выражений обеспечивает многократное сокращение их сложности [64, 66, 67]. При использовании символьных диакоптических алгоритмов (анализе электрических цепей по частям) ССФ оказываются конкурентоспособными с численным расчетом на основе систем уравнений [11]. Поэтому утверждения о целесообразности использования развернутых выражений в практике расчетов электрических цепей [2, 73, 74] беспочвенны [7].

2.4. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ФОЙСНЕРА

Оригинальные правила Кирхгофа не позволяют анализировать схемы, содержащие как сопротивления, так и проводимости, как источники напряжения, так и источники тока, требуя приведения всех элементов к элементам одного типа. Приведение элементов к одному типу, как предусматривают правила Кирхгофа и Максвелла, не только трудоемко (рутинно), но и не всегда возможно. Например, для нахождения схемных функций и откликов в полиномиальном виде требуется задание конденсаторов проводимостями, а катушек индуктивности сопротивлениями.

Основной недостаток правил Кирхгофа и Максвелла заключается, что на значительное (огромное для сложных схем) пространство перебора накладывается ряд ограничений для отбраковки и сортировки перечисляемых сочетаний элементов схемы. Это привело, в частности, к тому, что ни Кирхгоф, ни Максвелл не дали для своих правил ясного аналитического представления.

В 1902 году Фойснер обратил внимание на трудности нахождения слагаемых по первому правилу Кирхгофа и предложил формулы, исключая избыточные (не приводящие к результату) выкладки. Это достигается путем последовательных эквивалентных схемно-алгебраических преобразований исходной схемы попутно с записью ее параметров в результирующую ССФ. При этом используются «табличные» определители элементарных схем. Используемые в МСО схемно-алгебраические преобразования основаны на формулах выделения параметров, которые предложил *Фойснер* [82, 83].

Базовые формулы *Фойснера* позволяют свести разложение определителя исходной схемы к разложению определителей более простых производных схем, в которых отсутствует некоторая выделяемая ветвь z или y

$$\Delta = z\Delta^z + \Delta_z, \quad (2.7)$$

$$\Delta = y\Delta_y + \Delta^y, \quad (2.8)$$

где Δ – определитель схемы, нижний или верхний индексы при символе Δ указывают на стягивание или удаление выделяемой ветви соответственно. Стягивание ветви равносильно ее замене на схеме идеальным проводником.

Сущностью МСО является преобразование схемных или схемно-алгебраических формул в алгебраические формулы, пригодные для

вычислений. Проиллюстрируем эти формулы в схемно-алгебраическом виде [70]

$$\left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ z \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right| = z \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right|, \quad (2.9)$$

$$\left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ y \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right| = y \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right|, \quad (2.10)$$

где парами вертикальных линий обозначены схемные определители.

Другие две формулы требуют представления схемы в виде двух подсхем, имеющих один (формула (1.9)) или два (формула (1.10)) общих узла [82]

$$\Delta = \Delta 1 \cdot \Delta 2, \quad (2.11)$$

$$\Delta = \Delta 1 \cdot \Delta 2(a, b) + \Delta 1(a, b) \cdot \Delta 2, \quad (2.12)$$

где $\Delta 1$ и $\Delta 2$ – определители первой и второй подсхем, из которых состоит схема; $\Delta 1(a, b)$ и $\Delta 2(a, b)$ – определители схем, образованных соответственно из первой и второй подсхем в результате объединения общих узлов.

Формулы (2.11) – (1.2.12) наглядно представляются в виде схемно-алгебраических выражений соответственно [70]

$$\left| \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \text{---} \\ a \\ \text{---} \\ \boxed{2} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \text{---} \\ a \\ \text{---} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ \boxed{2} \end{array} \right|, \quad (2.13)$$

$$\left| \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \text{---} \\ a \\ \text{---} \\ b \\ \text{---} \\ \boxed{2} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \text{---} \\ a \\ \text{---} \\ b \\ \text{---} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right| \cdot \boxed{2} + \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right| \cdot \boxed{1} \cdot \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ a \\ | \\ b \\ | \\ \text{---} \end{array} \right| \cdot \boxed{2}. \quad (2.14)$$

Вырождение схемы и нейтрализация элементов. Довольно основательное рассмотрение понятия «вырождение» – одного из центральных понятий МСО – имелось уже в работах [95, 98]. Однако эти понятия до сих пор не вошли в стандартные курсы теоретических основ электротехники. Рекурсивное применение формул (2.7) – (2.8) и (2.11) – (2.12) по отношению к исходной схеме и производным от нее схемам приводит к простейшим схемам в виде разомкнутых и замкнутых ветвей (петель), которые представлены на рис. 2.3.

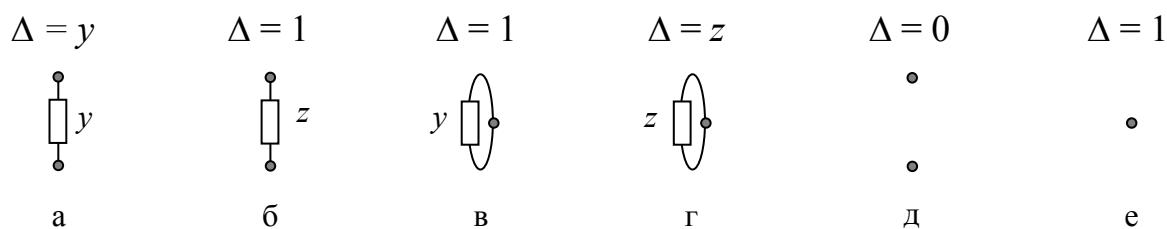


Рис. 2.3. Простейшие схемы и их определители

Фойснер при анализе схемы не только устранил комбинаторный перебор ее элементов. Выделение элемента по Фойснеру выполняется независимо от других элементов, поэтому схема может содержать как сопротивления, так и проводимости, что расширяет функциональные возможности метода.

Уязвимым местом метода Фойснера является нахождение числителя ССФ [82]. Как и Кирхгоф, Фойснер находил ток в схеме с сопротивлениями, но, подобно Максвеллу, от одного источника эдс.

Правило для числителя. «Чтобы образовать числитель I_k , если E находится в ветви λ , используются все замкнутые контуры K_1, K_2, \dots, K_g , которые содержат одновременно оба проводника λ и k . Берут слагаемое из Δ_λ , в котором не встречаются сопротивления проводников, содержащихся в K_1 , добавляют к этому члены, которые не содержат сопротивления из K_2 и так далее до использования всех контуров K_1, K_2, \dots, K_g . Алгебраическая сумма этих членов есть числитель I_k . Для учета знака выбирают какое-либо направление проводника k в качестве положительного, затем если совпадает направление тока в рассматриваемом контуре с направлением тока, то получается слагаемое с положительным знаком, если нет, то отрицательным».

В основе этого правила Фойснера лежит пятое правило Кирхгофа. Отличие заключается в том, что Фойснер сортирует для получения числителя не все слагаемые знаменателя, а только те из них Δ_λ , которые не содержат ветви λ . Упрощение процедуры нахождения числителя получается и за счет того, что перебор «сочетаний из w_1, w_2, \dots, w_n по $\mu-1$ » заменяется поиском контуров, которых оказывается значительно меньше.

Если некоторое слагаемое из Δ_λ , не содержит сопротивлений, образующих один из контуров, то это слагаемое помещается в числитель с соответствующим знаком. Про выбранные слагаемые в пятом правиле Кирхгофа говорится: «которые входят в знаменатель величин I , умноженные как на w_λ , так и на w_k . Именно эти сочетания $w_{k_1}, w_{k_2}, \dots, w_{k_{\mu-1}}$ обладают тем свойством, что после удаления проводников $k_1, k_2, \dots, k_{\mu-1}$ остается только одна замкнутая фигура, и что в эту фигуру входят и проводник λ , и проводник k ».

Для получения Δ_λ используется уже готовый знаменатель, то есть нахождение числителя, как и в пятом правиле Кирхгофа, должно выполняться после нахождения знаменателя.

Очевидно, что Кирхгоф предложил последнее в статье – пятое правило для того, чтобы исключить перебор сочетаний из числа элементов, заменив его одной операцией пересечения множеств. Предпочтительно совместно применять правила четвертое и пятое правила, минуя как перебор сочетаний, так и операцию пересечения, при этом формируя числитель в неявной форме. Для этого из знаменателя выбираются те слагаемые, которые содержат параметр w_λ , и из каждого слагаемого убирается сомножитель w_λ (правило 5). Затем используется вторая половина правила 4, начиная со слов: «обладающих тем свойством, что после исключения проводников $k_1, k_2, \dots, k_{\mu-1}$ в них остается одна замкнутая фигура;». Именно такую возможность реализовал Фойснер в своем правиле для числителя, заменив оба правила Кирхгофа одним более совершенным правилом.

Приведенное выше правило Фойснера требует трудоемкой сортировки почти половины выражения знаменателя и не предусматривает получение выражения числителя в компактной свернутой форме. Спустя два года Фойснер опубликовал новый результат [83, с. 385–386].

Разложение числителя по контурам. «Чтобы образовать числитель дроби, которая, перемножаясь с эдс E , дает ток I_k , необходимо использовать все замкнутые контуры K_1, K_2, \dots, K_g , в которые одновременно входят оба проводника λ и k . После удаления всех проводников контура K_1 объединяют все принадлежащие им вершины в одну. Определитель полученной таким образом цепи, умноженный на произведение проводимостей всех проводников K_1 , является вкладом этого контура в числитель I_k . Аналогично поступают с остальными контурами K_2, \dots, K_g . Знаки находятся аналогично предыдущему правилу».

Пятое правило Кирхгофа позволяет находить числитель отклика по его знаменателю, но предусматривает трудоемкую сортировку его слагаемых при выполнении теоретико-множественной операции пересечения множеств слагаемых, содержащих только ветвь с источником и только ветвь с искомым откликом. Разложение числителя по контурам, предложенное Фойснером, устраняет раздельное нахождение всех слагаемых числителя и обеспечивает вынесение общих множителей за скобки, но требует комбинаторной операции перечисления контуров.

Совершенный метод символьного анализа должен позволять находить как знаменатель, так и числитель на схемном уровне в виде определителя соответствующей схемы. Поскольку выражение числителя получается по выражению знаменателя, то и схема числителя, как и схема знаменателя, может быть получена на основе исходной схемы. Формирование компактных выражений обеспечивается вынесением за скобки общих слагаемых [5]. Для этого нужно использовать не правила Кирхгофа и Максвелла для знаменателя, а формулы выделения Фойснера [5].

2.5. ВЫВОДЫ

Итак, Фойснер обратил внимание на трудности построения ССФ с помощью топологических формул Кирхгофа и Максвелла, объяснив в 1902 году, почему они не находят применения у специалистов и отсутствуют в справочниках по физике [141]. Нахождение ССФ по Фойснеру предусматривает разложение определителей исходной схемы и производных от нее схем. Важно, что на каждом шаге расчета приходится иметь дело со схемой, менее сложной, чем исходная схема, а не с абстрактными сочетаниями ветвей исходной схемы.

Кирхгоф, а затем Максвелл, ставили перед собой задачу исключить появление взаимно уничтожающихся слагаемых, то есть избыточных слагаемых) в числителе и знаменателе отклика или схемной функции. Фойснер предельно упростил правила нахождения числителя и знаменателя, приведя их к аналитическому виду, что позволило представлять результаты в компактной форме с вынесенными за скобки общими множителями. Таким образом, Фойснер устранил избыточность не только на уровне избыточных слагаемых, но и на уровне вычислительных операций, то есть многократно уменьшил сложность формируемых выражений.

Пионерским шагом явился отказ от традиционного (с 1750 года) использования правила Крамера для аналитического (символьного) решения систем уравнений и запись решения в аналогичной форме – в виде отношения числителя и знаменателя, но в окончательном виде без необходимости дальнейшего упрощения. Безыбыточное выражение знаменателя, записанное непосредственно по виду схемы, получило в дальнейшем название «определитель схемы» или «схемный определитель» по аналогии с матричными определителями, используемыми в правиле Крамера.

Кирхгоф и Максвелл находили схемные определители в развернутом виде, а Фойснер – в виде компактно свернутого выражения. Не так важно, что Фойснер предложил эффективные формулы выделения, а Кирхгоф и Максвелл использовали трудоемкие и практически неприменимые к сложным схемам правила. Существенно то, что уже классики не обращались к алгебре (матричным определителям), а рассматривая только схему. Этим были заложены основы «схемной алгебры» в теории электрических цепей.

3. МЕТОД СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Схемный определитель зависит только от способа представления элементов (сопротивления, проводимости, смешанное задание). Можно составить для некоторой схемы различные системы уравнений, с различной степенью избыточности, но у всех них после исключения взаимно уничтожающихся слагаемых будет один и тот же определитель – схемный.

Фойснеру не удалось представить выражение числителя схемной функции в виде определителя некоторой схемы, чтобы было можно разложить его по тем же формулам, которые применяются для разложения знаменателя. Когда это стало возможным, топологический метод анализа электрической цепи непосредственно по схеме получил название «метода схемных определителей».

Аналогия с методом матричных определителей на этом заканчивается. Различие проявляется как в форме представления, так и в аппарате, используемом для разложения определителей. Схемно-алгебраический аппарат отличается от матрично-алгебраического тем, что разложение сопровождается упрощением исходной схемы путем удаления и стягивания ее элементов до получения простейших схем с известными определителями. В результате схемно-алгебраические выражения, через которые выражаются ССФ, упрощаются до обычных алгебраических выражений.

3.1. СХЕМНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ СХЕМНЫХ ФУНКЦИЙ

Аномальный схемный элемент – нулор. Для получения схемы числителя необходимо поместить на исходную схему аномальный схемный элемент – идеальный усилитель [78]. Этот элемент был введен в теорию цепей Теллегеном в 1954 году как управляемый источник (УИ), параметр которого (коэффициент передачи напряжения или передаточная проводимость) стремится к бесконечности [102]. При этом входное напряжение и ток УИ становятся равными нулю. *Б. Теллеген* не предложил какого-либо условного графического обозначения идеального усилителя.

Спустя шесть лет была оценена полезность нового элемента, и он получил название нулор [93]. Получили названия и аномальные составные части нуллора. Четырехполюсный элемент нулор образован двумя аномальными двухполюсниками: норатором (управляемой ветвью, генератором) и нулатором (управляющей ветвью, приемником). Напряжение на нораторе и ток через него не определены, точнее, определяются схемой, к которой подключен этот элемент.

Традиционные ненаправленные нулоры [102] широко применяются для матричного анализа, синтеза, диагностики электрических цепей [93]. Однако до недавнего времени ориентированные нулоры использовались сравнительно редко. Для топологического анализа электрических цепей *Браун* в 1966 году вводит понятие направленного нумерованного нуллора и его графическое

обозначение [5, 78] (рис. 3.1, а), отличающееся указанием ориентации. Ориентированный нуллок позволяет, используя метод выделения элементов, сформировать определитель схемы и его алгебраические дополнения без построения уравнений. Формально параметру нуллора можно присвоить значение, равное единице.



Рис. 3.1. Условные графические обозначения направленного нуллора (а) и неудаляемого управляемого источника (б)

В 2001 году *В. В. Филаретовым* обобщается нуллок *Брауна* путем введения понятия направленного взвешенного нуллора, названного неудаляемым управляемым источником (НУИ) [68] (рис. 3.1, б). НУИ в отличие от направленного нуллора *Брауна* имеет параметр χ , который может принимать любое конечное значение, например равное параметру выделяемого УИ или единице. В последнем случае взвешенный нуллок – НУИ становится направленным нуллокром *Брауна*. Взвешенный нуллок можно оставлять в схеме, чтобы отложить занесение его параметра в формулу схемного определителя. Это необходимо, например, для разработки более эффективных алгоритмов разложения определителей на основе выделения параметров УИ [3].

Обозначение нуллатора и норатора на рис. 3.1, б является более простым, поскольку они содержат меньшее число графических элементов, чем на рис. 3.1,а. Графическое обозначение на рис. 3.1, б прошло апробацию не только в отечественных изданиях [8, 9, 12, 16, 32–37, 42, 43, 68–70, 86–88], но и за рубежом [87, 88], в том числе на Европейской конференции по теории цепей и проектированию.

Идеальный ОУ обычно рассматривается как «некий источник, ток и напряжение на входе которого одновременно равны нулю при любых конечных значениях напряжения и тока на выходе» или как управляемый источник при бесконечно большом значении его параметра, поэтому понятие «НУИ» методически является более предпочтительным, чем понятие «нуллок». Кроме того, при необходимости параметру НУИ вместо значения, равного единице, можно присвоить значение, равное параметру некоторого УИ. Это отличает НУИ от обычного нуллора и ориентированного нуллора, которые сами по себе не имеют параметров, а моделируют ОУ с коэффициентом усиления, имеющим бесконечно большое значение. Далее, следуя традиции, будем использовать термин «нуллок», если используется НУИ с параметром, равным единице.

Использование нуллора для нахождения схемных функций и откликов. Норатор помещается на исходную схему вместо независимого источника, а нуллатор – вместо искомого отклика. Это позволяет свести нахождение выражения числителя к разложению определителя так называемой «схемы числителя». Возможность нахождения как числителя, так и знаменателя

ССФ в виде определителя некоторой схемы является основным аргументом в пользу названия «метод схемных определителей». В отличие от метода Крамера – метода матричных определителей, метод схемных определителей использует свой собственный схемно-алгебраический аппарат и не нуждается в каком-либо другом математическом аппарате.

В рамках метода схемных определителей легко объясняется первое правило Максвелла для числителя. При нахождении числителя независимые источники замещаются нораторами, а проводимости, параллельные норатору, удаляются из схемы числителя (в данном случае это проводимость K_{qr} . Если передаточная функция по напряжению будет находится от источника без внутреннего сопротивления, то множителя перед D_{ps} не будет, но выражение для D будет находиться по схеме, в которой независимый источник напряжения стянут (нейтрализован, то есть удален из схемы, а его узлы объединены).

Второе правило Максвелла для числителя (с отдельным нахождением положительных и отрицательных слагаемых) также легко доказывается с помощью метода схемных определителей. Для объяснения этого правила в рамках МСО независимый источник и идеальный проводник с искомым током замещаются норатором и нуллатором соответственно, причем норатор имеет направление, противоположное направлению источника, а ориентация нуллатора совпадает с направлением отклика [70, 78]. В результате стягивания проводимостей, учитываемых в каждом из выбранных произведений, получается двухузловая схема в виде соединения норатора и нуллатора. При этом слагаемым из Δ_1 соответствует схема с противоположным направлением норатора и нуллатора в образованном контуре. Для слагаемых из Δ_2 имеет место обратное.

Схемные функции линейной электрической цепи. Отношение значения реакции электрической схемы к заданному значению воздействия, выраженное через параметры элементов схемы, называется символьной схемной функцией (ССФ) [50]. ССФ имеют широкий спектр применений, в частности они используются для нахождения символьных выражений откликов (СВО). Однако Кирхгоф в отличие от Максвелла не находил отдельно ССФ, а сразу записывал СВО.

Например, на рис. 3.2 прямоугольником отображена произвольная цепь, не содержащая непосредственно независимых источников; стрелки с оперением указывают направления передачи тока и напряжения. Ветви, содержащие источники E, J , называются передающими (или передатчиками), а ветви U, I – принимающими (или приемниками). Напряжение U и ток I любой ветви линейной электрической цепи при постоянных источниках ЭДС E и тока J , показанные на рис. 3.2, могут быть найдены:

$$U = K_{EU}E + R_{JU}J, \quad I = G_{EI}E + \beta_{JI}J, \quad (3.1)$$

где K_{EU} – коэффициент передачи напряжения от источника E к ветви U ; β_{JI} – коэффициент передачи тока от источника J к ветви I ; R_{JU} – передаточное сопротивление от источника J к ветви U ; G_{EI} – передаточная проводимость от источника E к ветви I .

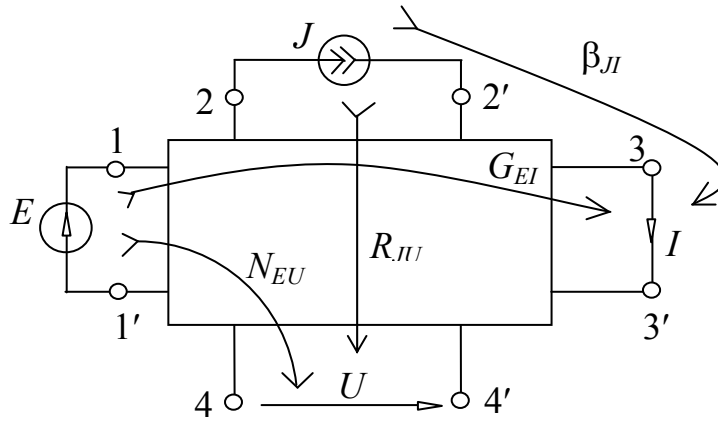


Рис. 3.2. Иллюстрация передаточных схемных функций

В методе схемных определителей ССФ формируются без составления уравнений цепи – непосредственно по схеме на основе формулы

$$H = \frac{N}{D}, \tag{3.2}$$

где N, D – определители схем, отображающих числитель и знаменатель (кратко – определители схем числителя и знаменателя) соответственно.




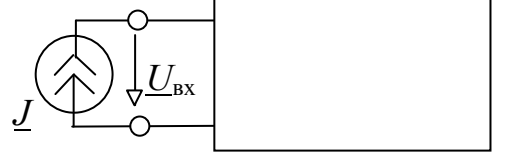
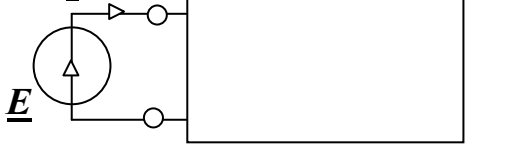
Сущность метода схемных определителей (МСО) заключается в получении ССФ, исходя из определителей схем числителя и знаменателя, которые находятся путем последовательного выделения элементов.

Схемные функции, входящие в формулу (3.1), получают с помощью схемно-алгебраических выражений (САВ) из табл. 3.1 [70].

Таблица 3.1

Схемно-алгебраические выражения схемных функций

№	Исходная схема	САВ
1	Коэффициент передачи по напряжению	
		$K_{EU} = \frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{\left \begin{array}{c} \text{Circuit diagram for numerator } N_{EU} \\ \text{Circuit diagram for denominator } D_{EU} \end{array} \right }{\left \begin{array}{c} \text{Circuit diagram for denominator } D_{EU} \\ \text{Circuit diagram for numerator } N_{EU} \end{array} \right }$

1	2	
2	Передаточная проводимость	
		$Y_{EI} = \underline{I} / \underline{E} = \frac{\left \begin{array}{c} \text{Circuit diagram with } E \text{ and short circuit} \\ \text{Circuit diagram with } E \text{ and open circuit} \end{array} \right }{\left \begin{array}{c} \text{Circuit diagram with } E \text{ and short circuit} \\ \text{Circuit diagram with } E \text{ and open circuit} \end{array} \right }$
3	Передаточное сопротивление	
		$Z_{JU} = \underline{U} / \underline{J} = \frac{\left \begin{array}{c} \text{Circuit diagram with } J \text{ and open circuit} \\ \text{Circuit diagram with } J \text{ and short circuit} \end{array} \right }{\left \begin{array}{c} \text{Circuit diagram with } J \text{ and open circuit} \\ \text{Circuit diagram with } J \text{ and short circuit} \end{array} \right }$
4	Коэффициент передачи по току	
		$B_{JI} = \underline{I} / \underline{J} = \frac{\left \begin{array}{c} \text{Circuit diagram with } J \text{ and short circuit} \\ \text{Circuit diagram with } J \text{ and open circuit} \end{array} \right }{\left \begin{array}{c} \text{Circuit diagram with } J \text{ and short circuit} \\ \text{Circuit diagram with } J \text{ and open circuit} \end{array} \right }$
5	Входное сопротивление	
		$Z_{JU} = \underline{U}_{\text{вх}} / \underline{J} = \frac{\left \begin{array}{c} \text{Circuit diagram with } J \text{ and open circuit} \\ \text{Circuit diagram with } J \text{ and short circuit} \end{array} \right }{\left \begin{array}{c} \text{Circuit diagram with } J \text{ and open circuit} \\ \text{Circuit diagram with } J \text{ and short circuit} \end{array} \right }$
6	Входная проводимость	
		$Y_{EI} = \underline{I}_{\text{вх}} / \underline{E} = \frac{\left \begin{array}{c} \text{Circuit diagram with } E \text{ and short circuit} \\ \text{Circuit diagram with } E \text{ and open circuit} \end{array} \right }{\left \begin{array}{c} \text{Circuit diagram with } E \text{ and short circuit} \\ \text{Circuit diagram with } E \text{ and open circuit} \end{array} \right }$

Следует обратить внимание на то, что числители всех передаточных функций для заданных источника и приемника одинаковы. Эти передаточные функции различаются только знаменателями.

Как видно, построение схемы знаменателя проводится на основе исходной схемы путем замыкания источника эдс E и размыкания источника тока J , в зависимости от того, какой из них оставляется в схеме. При нахождении напряжения ветвь отклика – приемник напряжения – размыкается, а при нахождении тока ветвь отклика – приемник тока – заменяется идеальным проводником (стягивается).

Для построения схемы числителя нуллятор включается в исходную схему следующим образом: нуллятор заменяет приемник напряжения или тока, сохраняя их направление, а норатор подсоединяется взамен источника эдс E или тока J и ориентируется противоположно их направлениям.

3.2. ОБОБЩЕНИЯ ФОРМУЛ ВЫДЕЛЕНИЯ

Управляемые источники и формулы выделения их параметров.

В практических схемах обычно используются четыре типа управляемых источников (УИ): 1) источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН); 2) источник тока, управляемый током (ИТУТ); 3) источник напряжения, управляемый током (ИНУТ); 4) источник тока, управляемый напряжением (ИТУН).

Невозможность непосредственного применения формул (2.7) – (2.8) и (2.11) – (2.12) для анализа схем с УИ, используемыми в моделях электронных ламп и транзисторов, обусловили забвение этих формул на многие десятилетия.

В 1977 году *Хашемян* [90] предложил формулу выделения параметра произвольного УИ на основе направленного нумерованного нуллора. В соответствии с этой формулой определитель схемы

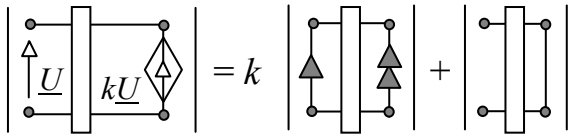
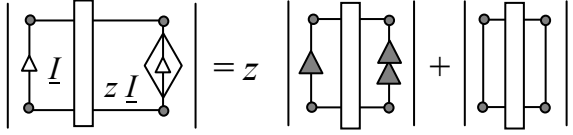
$$\Delta = \chi \Delta(\text{УИ} \Rightarrow \text{нуллор}) + \Delta(\chi=0), \quad (3.3)$$

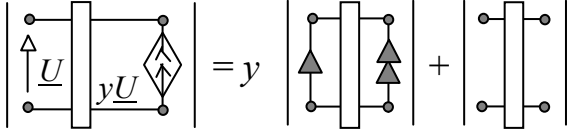
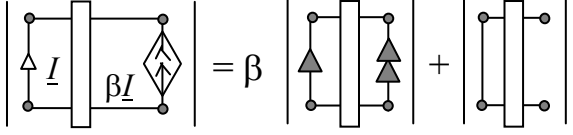
где χ – параметр УИ; $\Delta(\text{УИ} \Rightarrow \text{нуллор})$ – определитель исходной схемы, в которой УИ заменен на нуллятор, причем генератор УИ – на норатор, а приемник УИ – на нуллятор; $\Delta(\chi=0)$ – определитель исходной схемы, в которой нейтрализован УИ.

Схемно-алгебраические выражения, иллюстрирующие формулу (3.3) для различных типов УИ, приводятся в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Формулы выделения параметров управляемых источников

№ п/п	Тип управляемого источника	Схемно-алгебраическое выражение
1	ИНУН	
2	ИНУТ	

1	2	3
3	ИТУН	
4	ИТУТ	

Хашемян использовал предложенную формулу для одновременного разложения схемного определителя по параметрам всех n УИ, что требует перебора 2^n слагаемых и не обеспечивает формирование оптимальных по вычислительной сложности выражений. Это послужило веской причиной того, что формула Хашемяна не была востребована специалистами, что до конца 20-го века продолжило преимущественное развитие матричных и графовых методов символьного анализа электрических цепей.

Только через 20 лет [68] было предложено рекурсивное использование формулы (2.3). Это позволило ей стать пятой формулой метода схемных определителей [42].

Обобщение формул выделения на основе условий вырождения и нейтрализации. МСО не накладывает ограничений на элементный базис анализируемой схемы. Элементы, из которых может состоять схема, перечислены в первом столбце табл. 2.3.

Генератором напряжения называется независимый источник напряжения или управляемая ветвь управляемого источника – источника напряжения, управляемого напряжением (ИНУН) или источника напряжения, управляемого током (ИНУТ).

Генератором тока называется независимый источник тока или управляемая ветвь управляемого источника – источника тока, управляемого напряжением (ИТУН) или источника тока, управляемого током (ИТУТ).

Приемником напряжения называется разомкнутая ветвь с искомым током или управляющая ветвь ИНУН или ИТУН. Приемником тока называется идеальный проводник (короткозамкнутая ветвь) с искомым током или управляющая ветвь ИНУТ или ИТУТ.

Термин «приемник» (в зарубежной литературе – сенсор, чувствительный элемент) был введен в отечественной литературе в 1998 году [69], и является кратким наименованием понятия «управляющая ветвь». Производные от термина «приемник» термины «приемник напряжения» и «приемник тока» звучат вполне логично. В то же время иногда используемые термины «управляющая ветвь напряжения» и «управляющая ветвь тока» имеют жаргонный оттенок. Во избежание недоразумений приходится говорить

длинно: «ветвь, управляющая (своим) напряжением» или «ветвь, управляющая (своим) током», что окончательно запутывает читателя. Поэтому будем использовать термины «приемник напряжения» и «приемник тока». Новые понятия вводятся, в том числе и для того, чтобы упростить средства выражения и облегчить коммуникацию в науке.

Термин «генератор» (в зарубежной литературе – источник, передатчик) также был введен в отечественной литературе в 1998 году [69], и является кратким наименованием понятия «управляемая ветвь». Производные от термина «генератор» термины «генератор напряжения» и «генератор тока» звучат вполне логично. В то же время иногда используемые термины «управляемая ветвь напряжения» и «управляемая ветвь тока» имеют жаргонный оттенок. Уточнение этих терминов только приводит к недоразумениям. Поэтому будем использовать термины «генератор напряжения» и «генератор тока», имея в виду управляемые ветви зависимых источников. Путаницы не возникает, поскольку при этом, например, выражение «генератор напряжения, управляемый током» будет считаться некорректным, как и аббревиатура ГНУТ (и далее ГНУН, ГТУТ, ГТУН). «Генератор напряжения или тока» – это синоним управляемой ветви зависимого источника. Следовательно, термин «генератор» имеет ясный физический смысл.

Как видно из второго и третьего столбцов табл. 2.3, генератор и приемник любого типа обладают противоположными свойствами при объединении соответствующих узлов (превращению в петлю) и размыкании. В одном случае это приводит к вырождению элемента, а следовательно, и схемы, в которой он находится. В другом случае элемент перестает оказывать влияние на схему, то есть оказывается нейтрализованным. Нейтрализация равносильна присвоению параметру элемента значения, равного нулю, и исключению элемента из схемы либо путем стягивания, либо путем удаления (в соответствии с физическими свойствами).

Вырождение источника напряжения (при замыкании его узлов) и источника тока (при размыкании) в традиционном курсе ТОЭ известно давно, но трактуется как запрет на замыкание источника напряжения и на размыкание источника тока. На этот вопрос нужно смотреть шире: замыкать источники напряжения и размыкать источники тока можно – в результате таких преобразований получается вырожденная схема, определитель которой равен нулю.

Вырождение приемников напряжения и тока вообще не затрагивалось до развития МСО. Однако вырождение приемников можно обосновать с помощью вырождения источников. Действительно, ток, протекающий через замкнутый накоротко приемник тока, и напряжение на разомкнутом приемнике напряжения имеют неопределенные значения (неопределенность вида $0/0$). Убедиться в этом можно, подсоединив последовательно с приемником тока \underline{I} и параллельно с приемником напряжения \underline{U} , соответственно, источник эдс $\underline{E} = 0$ и источник тока $\underline{J} = 0$.

Особые свойства генератора и приемника НУИ проявляются в том, что они вырождаются в каждом из двух случаев: 1) при объединении узлов; 2) при размыкании. Таким образом, генератор НУИ ведет себя одновременно и как

генератор напряжения, и как генератор тока. Приемник НУИ обладает свойствами как приемника напряжения, так и приемника тока.

Нейтрализация – исключение элементов из схемы выполняется либо их стягиванием (заменой идеальным проводником), либо их удалением из схемы. В отличие от удаления стягивание элемента выполняется двумя операциями: 1) удалением элемента из схемы; 2) объединением соответствующих узлов. Для исключения элемента из схемы его нужно либо замкнуть, либо разомкнуть. Генератор и приемник, образующие НУИ, нельзя ни замыкать, ни размыкать, поэтому аномальный управляемый источник получил название неудаляемого УИ.

Таблица 3.3

**Условия вырождения схемы и нейтрализации элементов
при замыкании и размыкании ветвей**

Элемент схемы	Замыкание	Размыкание
u -ветвь	Нейтрализация	Выделение u
z -ветвь	Выделение z	Нейтрализация
Генератор \underline{E}	Вырождение	Нейтрализация
Приемник \underline{I}	Вырождение	Нейтрализация
Генератор \underline{J}	Нейтрализация	Вырождение
Приемник \underline{U}	Нейтрализация	Вырождение
Генератор НУИ (норатор)	Вырождение	Вырождение
Приемник НУИ (нуллатор)	Вырождение	Вырождение

Формулы выделения сопротивлений и проводимостей, предложенные Фойснером, характеризуются двумя состояниями элемента: 1) элемент находится в активном состоянии, и его параметр заносится в формулу определителя; 2) элемент нейтрализован, и его параметр не учитывается в формуле (табл. 3.3). Как видно из таблицы, замыкание и размыкание z - и u -ветвей не может привести к вырождению схемы. Это вытекает из того, что z -ветвь можно представить в виде последовательного соединения генератора напряжения и приемника тока, а u -ветвь – в виде параллельного соединения генератора тока и приемника напряжения. Таким образом, формулы Фойснера (2.7) и (2.8) соответствуют частным случаям выделения ИНУТ и ИТУН.

Рассмотрим получение общих формул выделения ИНУТ и ИТУН, основываясь на табл. 3.3. Второй и третий столбцы табл. 3.3 относятся к первому или второму слагаемому формул выделения. Например, для z -ветви первое слагаемое находится во втором столбце, а второе – в третьем. Для u -ветви первое слагаемое находится в третьем столбце, а второе – во втором.

Руководствуясь этой логикой, мы видим, что генератор напряжения и приемник тока вырождаются в одном (во втором) столбце таблицы и нейтрализуются в одном (в третьем) столбце табл. 3.3. Вырождение соответствует первому слагаемому формулы выделения, а нейтрализация – второму. Вырождение наступает, когда генератор напряжения и приемник тока обладают свойствами НУИ, поэтому первое слагаемое формулы выделения

является определителем схемы, образованной из исходной схемы в результате замещения генератора напряжения и приемника тока генератором НУИ и приемником НУИ соответственно. Отсюда получаем формулу выделения УИ

$$\Delta = \Delta(\chi \Rightarrow \text{НУИ}) + \Delta(\chi = 0), \quad (3.4)$$

где χ – параметр УИ; $\Delta(\chi \Rightarrow \text{НУИ})$ – определитель исходной схемы, в которой УИ заменен на НУИ, причем генератор УИ – на генератор НУИ, а приемник УИ – на приемник НУИ; $\Delta(\chi=0)$ – определитель исходной схемы, в которой нейтрализован УИ.

Для получения формулы выделения ИТУН следует учесть, что генератор тока и приемник тока вырождаются в одном (в третьем) столбце табл. 3.4 и нейтрализуются в другом (во втором) столбце таблицы. Для получения единой записи формул выделения вырождение по-прежнему будет соответствовать первому слагаемому формулы выделения, а нейтрализация второму. Следовательно, формула выделения ИТУН по виду не будет отличаться от формулы (3.4) при выделении ИНУТ.

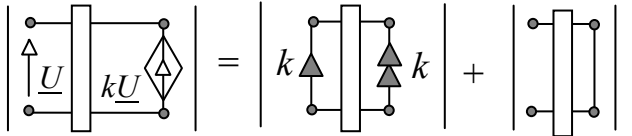
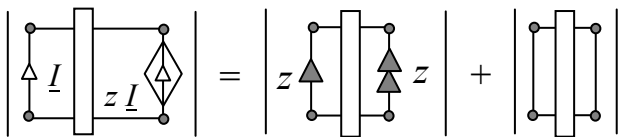
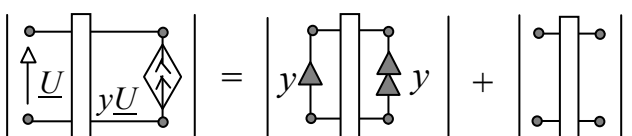
Возможность выделения параметров ИНУТ и ИТУН по одной и той же формуле заключается в различии способов получения второго слагаемого. В первом случае нейтрализация выполняется стягиванием источника и приемника, а во втором случае – их удалением.

По этой же формуле (3.4) выполняется выделение ИНУН и ИТУТ. В первом случае нейтрализация выполняется стягиванием источника напряжения и удалением приемника напряжения. Во втором случае, наоборот, необходимо удаление источника тока и стягивание приемника тока.

Схемно-алгебраические выражения рассмотренных вариантов формулы (3.4) сведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Неявные формулы выделения параметров управляемых источников

№ п/п	Тип управляемого источника	Схемно-алгебраическое выражение
1	ИНУН	
2	ИНУТ	
3	ИТУН	

1	2	3
4	ИТУТ	

Простейшие схемы с нулором представлены на рис. 3.3.



Рис. 3.3. Простейшие схемы с нуи и их определители

Определители схем на рис. 3.3, как и определители схем на рис. 3.3, запоминаются для эффективного применения метода схемных определителей.

В результате стягивания и удаления ветвей могут образоваться вырожденные схемы, определитель которых тождественно равен нулю, что упрощает разложение определителей. К таким схемам относятся не только несвязные схемы, но и схемы с разомкнутым или замкнутым норатором или нулатором.

Отличия формул (3.3) и (3.4) заключаются в том, что вторая формула предназначена для формирования более компактного выражения определителя на основе рекурсии и удобна для компьютерной реализации. Как правило, при разложении схемных определителей не следует выносить за скобки параметр УИ, поскольку это приводит к появлению в конце подвыражения избыточного умножения на 1 или -1 (рис. 3.3). Для уменьшения вычислительной сложности формируемых выражений целесообразно завершать подвыражения умножением на χ или $-\chi$. Первые версии программы генерации оптимальных выражений схемных определителей CIRSYM (Circuit Symbol) [3, 71, 72] появились вслед за опубликованием формулы (3.4) [68].

Метод схемных определителей в отличие от других методов лишен ограничений на тип используемых линейных элементов. По сравнению с другими топологическими методами этот метод не требует применения теоретико-множественного или графового аппаратов, позволяет получить решение непосредственно по схеме без образования взаимно уничтожающихся слагаемых в выражениях ССФ. Вместе с тем нелишне рассмотреть взаимосвязь слагаемых формул выделения параметров УИ с позиций теории множеств.

3.3. ТЕОРЕТИКО–МНОЖЕСТВЕННАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВЫДЕЛЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

В формулах (3.3) и (3.4) первое слагаемое-схема содержит нуллок, который не может быть удален, точнее, нейтрализован. Поэтому для получения символьного выражения определителя схем, содержащих нуллок, используются их локализация путем выделения параметров двухполюсных элементов до получения вырожденных схем или простейших схем вида рис. 3.3. Здесь рассматривается способ выделения НУИ для использования на любом из этапов получения символьного выражения схемного определителя.

Теоретико-множественная интерпретация выделения УИ. Представим, что в схеме присутствует один или несколько УИ, выберем из всех присутствующих в схеме УИ какой-нибудь один и проведем локализацию подвыражений этого четырехполюсника. Для этого выделим все элементы, присутствующие в схеме, кроме выбранного УИ. В результате локализации, мы получим схемно-символьное выражение, состоящее из произведения некоторого многочлена и определителя схемы, содержащей только некоторый УИ.

Количество невырожденных схем, содержащих единственный УИ, зависит от его типа. В общем случае схем, которые будут невырожденными хотя бы для одного из типов УИ, существует только пять (рис. 3.4): 1) последовательно соединенные генератор и приемник (рис. 3.4, а); 2) параллельно соединенные генератор и приемник (рис. 3.4, б); 3) генератор, соединенный с петлей из приемника (рис. 3.4, в); 4) приемник, соединенный с петлей из генератора (рис. 3.4, г); 5) петля из генератора и приемника (рис. 3.4, д). Чтобы подчеркнуть несущественность ориентации, генераторы обозначены ромбиком без стрелок, а приемники – кружком.

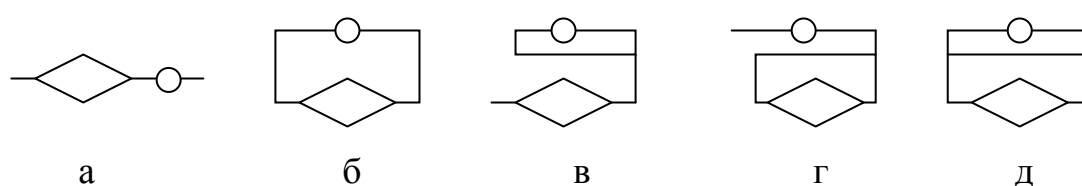


Рис. 3.4. Простейшие схемы из УИ. а – cir_1 , б – cir_2 , в – cir_3 , г – cir_4 , д – cir_5

Все остальные схемы будут вырожденными для любого типа УИ и их определители обратятся в нуль. Таким образом, схемно-символьное выражение схемного определителя, который мы пытаемся получить, можно представить в виде:

$$\Delta = A|cir_1| + B|cir_2| + C|cir_3| + D|cir_4| + E|cir_5|, \quad (3.5)$$

где A, B, C, D и E – некоторые выражения; $|cir_n|$ – определитель схемы cir_n .

Окончательное символьное выражение определителя будет зависеть от типа УИ, потому что некоторые из простейших схем также могут быть вырождены. Для наглядности определим символьные выражения определителей простейших схем, изображенных на рис. 3.4, для различных типов УИ (табл. 3.5), где χ – параметр данного УИ. Таким образом, после подстановки значений определителей простейших схем из табл. 3.5 в выражение (3.5), мы можем более точно определить символьное выражение определителей для каждого типа УИ.

Таблица 3.5

Выражение определителя простейшей схемы из УИ

	ИНУН	ИНУТ	ИТУН	ИТУТ
Рис. 1, а	0	1	0	0
Рис. 1, б	$\chi + 1$	χ	χ	$\chi + 1$
Рис. 1, в	1	0	0	0
Рис. 1, г	0	0	0	1
Рис. 1, д	0	0	1	0

Таблица 3.6

Выражение определителя схемы с определенным типом УИ

Тип УИ	Полное выражение определителя (Δ)	Выражение, полученное после замены УИ на НУИ	Выражение, полученное после нейтрализации УИ
ИНУН	$X(B) + (B + C)$	B	$B + C$
ИТУТ	$X(B) + (B + D)$	B	$B + D$
ИНУТ	$X(B) + (A)$	B	A
ИТУН	$X(B) + (E)$	B	E

Из табл. 3.6 видно, что значение определителя схемы при замене УИ на НУИ не зависит от типа УИ и равно выражению B . В то же время выражение B присутствует в выражении определителя при нейтрализации УИ по правилам нейтрализации ИНУН и ИТУН.

Теперь докажем следующие тождества:

$$A \cap B = A \cap C = A \cap D = A \cap E = B \cap C = B \cap D = B \cap E = C \cap D = \\ = C \cap E = D \cap E = 0. \quad (3.6)$$

Легко увидеть, что все выражения состоят из одночленов, причем каждый из одночленов является уникальным. Если бы существовало два одинаковых одночлена, тогда это означало бы, что эти одночлены были получены в

результате одной и той же последовательности действий. Иными словами, при получении обоих одночленов мы выполняли одни и те же действия – выделяли определенные элементы и нейтрализовали другие. А значит, выражение не может содержать одинаковых одночленов.

Если же все одночлены уникальные, то и многочлены, которые состоят из этих одночленов, не пересекаются.

Тогда, исходя из тождеств (3.6), мы можем найти выражение B как пересечение определителей схемы, где УИ нейтрализован как ИНУН и УИ нейтрализован как ИТУТ, то есть:

$$B = (B + C) \cap (B + D), \quad (3.7)$$

Действительно, тождество (3.7) верно, так как

$$(B + C) \cap (B + D) = B \cap B + B \cap D + C \cap B + C \cap D,$$

а

$$B \cap D = B \cap C = C \cap D = 0 \text{ и } B \cap B = B.$$

Тождество (3.7) в схемном виде изображено на рис. 3.5. Однако мы получили выражение B , в виде многочлена без учета знака. Знаки всех одночленов будут положительными, поскольку мы никак не учитывали направление приемника и генератора. Поэтому помимо получения самого многочлена нам также дополнительно нужно будет определить знаки каждого из одночленов.

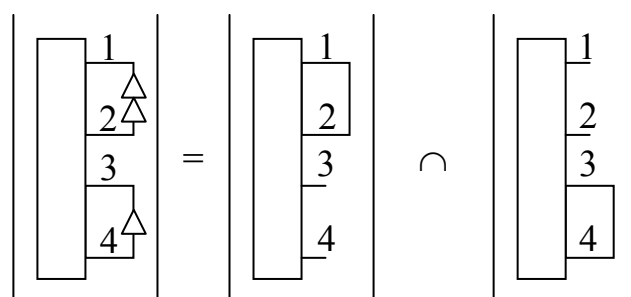


Рис. 3.5. Выделение НУИ в схемном виде

Для получения знаков каждого из одночленов можно воспользоваться следующим правилом: все элементы, параметры которых присутствуют в одночлене, выделяются из схемы согласно правилам их выделения, все элементы, параметры которых отсутствуют в одночлене, нейтрализуются согласно правилам нейтрализации элементов данного типа. После этого должна остаться схема, состоящая лишь из выделяемого УИ, причем источник и приемник будут соединены параллельно. Если и приемник, и источник направлены к одному и тому же узлу, то знак одночлена положительный, иначе он отрицательный.

Аналогичный тождеству (3.7) и рис. 3.5 результат в виде функции совпадения *sim* был ранее использован в работе [1], для нахождения числителей

ССФ и анализа схем с УИ методом структурных чисел. Сама идея поиска контуров, содержащих и генератор, и приемник, для получения числителей схемных функций принадлежит Кирхгофу [91].

На основе полученной формулы (3.7) и рис. 3.5, можно предложить альтернативную формулу выделения УИ, преобразовав формулу (3.3) в четыре новые формулы для выделения ИТУТ – (3.8), ИНУН – (3.9), ИТУН – (3.10) и ИНУТ – (3.11).

$$\Delta = \beta(\Delta_{\Pi}^{\Gamma} \cap \Delta_{\Gamma}^{\Pi})^{\pm} + \Delta_{\Pi}^{\Gamma}, \quad (3.8)$$

$$\Delta = K(\Delta_{\Pi}^{\Gamma} \cap \Delta_{\Gamma}^{\Pi})^{\pm} + \Delta_{\Gamma}^{\Pi}, \quad (3.9)$$

$$\Delta = G(\Delta_{\Pi}^{\Gamma} \cap \Delta_{\Gamma}^{\Pi})^{\pm} + \Delta^{\Pi\Pi}, \quad (3.10)$$

$$\Delta = Z(\Delta_{\Pi}^{\Gamma} \cap \Delta_{\Gamma}^{\Pi})^{\pm} + \Delta_{\Pi\Pi}, \quad (3.11)$$

где Δ_{Π}^{Γ} – определитель производной схемы, полученной из исходной схемы путем удаления источника и стягивания приемника УИ; Δ_{Γ}^{Π} – определитель производной схемы, полученной из исходной схемы путем удаления приемника и стягивания источника УИ; $\Delta^{\Pi\Pi}$ – определитель производной схемы, полученной из исходной схемы путем удаления источника и приемника УИ; $\Delta_{\Pi\Pi}$ – определитель производной схемы, полученной из исходной схемы путем стягивания источника и приемника УИ; символ \pm над выражением $(\Delta_{\Pi}^{\Gamma} \cap \Delta_{\Gamma}^{\Pi})^{\pm}$ – обозначает, что для полученного многочлена необходимо произвести операции по определению знаков одночленов (знаки одночленов являются отражением того, как генератор и приемник УИ направлены относительно друг друга и относительно других активных элементов, в то время как выражение многочлена без знаков лишь отражает, как УИ расположен в схеме).

Специальные формулы выделения ИНУН и ИТУТ. Из формул (3.8) и (3.9), по выделению ИНУН и ИТУТ, с помощью перегруппировки слагаемых можно получить новые формулы (3.12) и (3.13) соответственно.

$$\Delta = (\Delta_{\Pi}^{\Gamma} \cap \Delta_{\Gamma}^{\Pi})(1 \pm \beta) + (\Delta_{\Pi}^{\Gamma} \setminus \Delta_{\Gamma}^{\Pi}), \quad (3.12)$$

$$\Delta = (\Delta_{\Pi}^{\Gamma} \cap \Delta_{\Gamma}^{\Pi})(1 \pm K) + (\Delta_{\Gamma}^{\Pi} \setminus \Delta_{\Pi}^{\Gamma}), \quad (3.13)$$

где Δ_{Π}^{Γ} – определитель производной схемы, полученной из исходной схемы путем удаления генератора и стягивания приемника УИ; Δ_{Γ}^{Π} – определитель производной схемы, полученной из исходной схемы путем удаления приемника и стягивания генератора УИ; символ «\» – обозначает операцию вычитания теории множеств; символ \pm перед параметрами β и K обозначает, что для полученного многочлена необходимо выполнить операции по определению знаков одночленов.

Знаки одночленов являются отражением того, как генератор и приемник УИ направлены относительно друг друга и относительно других активных элементов. В то же время выражение многочлена без знаков лишь отражает, как УИ расположен в схеме. С учетом знаков первое слагаемое в формуле (3.12) или (3.13) разбивается на два слагаемых: одно из которых содержит

множителем $(1+\beta)$ или $(1+K)$, а второе слагаемое имеет множитель $(1-\beta)$ или $(1-K)$.

В новых формулах группировка выполняется не относительно параметра УИ, как это сделано в формулах (3.8) и (3.9), а относительно выражений, полученных на основе B , C и D . Выражение C может быть найдено как результат отношения исключения (в теории множеств это отношение является операцией вычитания) из множества одночленов $(B+C)$ множества одночленов $(B+D)$, выражение D можно найти как вычитание из множества одночленов $(B+D)$ множества одночленов $(B+C)$.

Нетрудно заметить, что при нахождении символьных выражений определителей по формулам (3.12) и (3.13), выражения соответствующие пересечению двух множеств и их разности, из-за специфики этих операций, могут быть определены на одном шаге, что не потребует большого числа дополнительных вычислений.

Пример 1. Пусть имеется схема с ИТУН, изображенная на рис. 3.6, а. Согласно формуле (3.10), нам нужно найти определители трех схем: 1) схемы, в которой генератор УИ удален, а приемник УИ стянут – рис. 3.6, б; 2) схемы, в которой приемник УИ был удален, а генератор УИ стянут – рис. 3.6, в; 3) схема, в которой и генератор УИ и приемник УИ удалены – рис. 3.6, г.

Определитель схемы, изображенной на рис. 3.6, б, равен $\Delta_{\Pi}^{\Gamma} = R_2R_1 + R_2R_4 + R_3R_1 + R_3R_4$, определитель схемы на рис. 3.6, в равен $\Delta_{\Gamma}^{\Pi} = R_2R_1 + R_2R_3 + R_4R_1 + R_4R_3$, а определитель третьей схемы изображенной на рис. 3.6, г равен $\Delta^{\Pi\Gamma} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$.

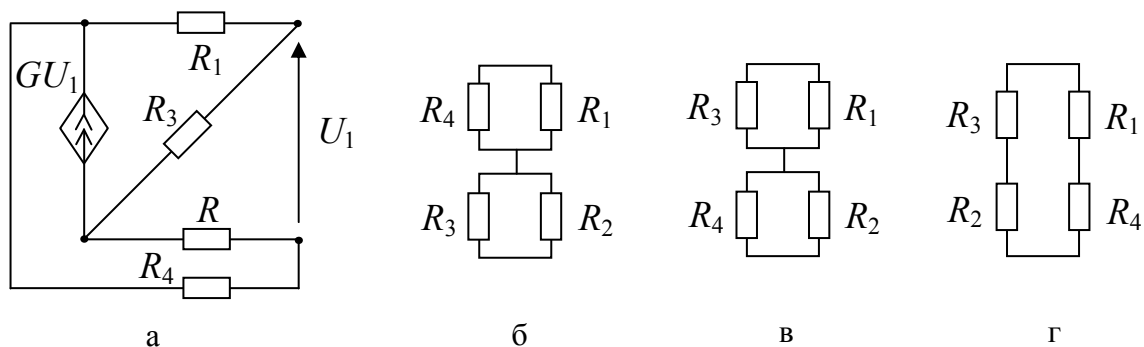


Рис. 3.6. Пример выделения ИТУН

Пересечением двух выражений $(\Delta_{\Pi}^{\Gamma} \cap \Delta_{\Gamma}^{\Pi})$ будет сумма двух одночленов, которые встречаются в обоих выражениях: R_2R_1 и R_3R_4 . Теперь необходимо определить их знаки.

Для одночлена R_1R_2 выполним следующие операции: 1) выделим в схеме на рис. 3.6,а элементы R_1 и R_2 , которые присутствуют в одночлене; 2) нейтрализуем R_3 и R_4 , которые в одночлене отсутствуют. Для сопротивлений выделению соответствует удалению элемента из схемы, а нейтрализации – замена элемента идеальным проводником. В результате получим схему, в которой генератор и приемник направлены к разным узлам. Значит знак этого одночлена – отрицательный.

Аналогично для одночлена R_3R_4 выполним следующие операции: 1) выделим в схеме на рис. 3.6, а элементы R_3 и R_4 , которые присутствуют в одночлене; 2) нейтрализуем R_1 и R_2 , которые в одночлене отсутствуют. В результате получим схему, в которой генератор и приемник направлены к одному и тому же узлу. Следовательно, знак этого одночлена – положительный.

Таким образом, $(\Delta_{\Pi}^{\Gamma} \cap \Delta_{\Gamma}^{\Pi})^{\pm} = R_3R_4 - R_1R_2$. Полное выражение определителя будет иметь вид:

$$\Delta = G(R_3R_4 - R_1R_2) + (R_1 + R_2 + R_3 + R_4).$$

Пример 2. Теперь рассмотрим предыдущий пример, заменив ИТУН на ИНУН, как показано на рис. 3.7, а. Согласно формулам (3.9) и (3.13), необходимо найти определители двух схем: 1) схемы, где генератор был удален, а приемник УИ стянут (рис. 3.7, б); 2) схемы, в которой приемник удален, а генератор УИ стянут (рис. 3.7, в).

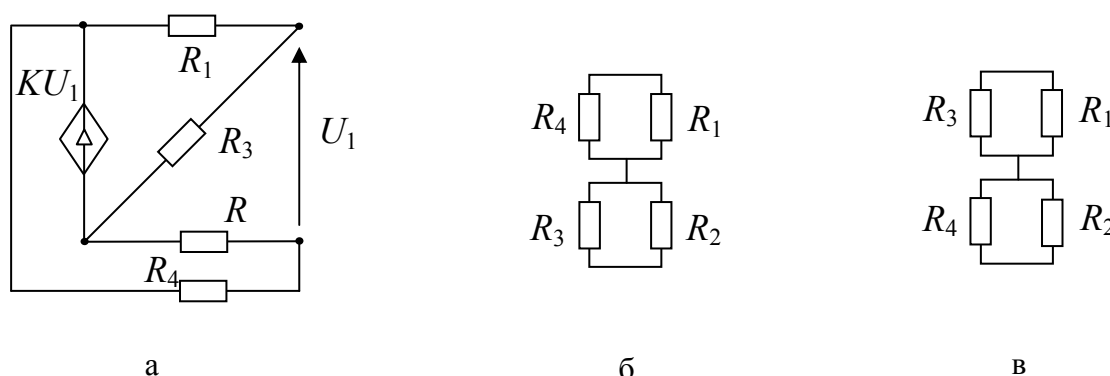


Рис. 3.7. Пример выделения ИНУН

Определители схем, изображенных на рис. 3.7, б и рис. 3.7, в равны соответственно $\Delta_{\Pi}^{\Gamma} = R_2R_1 + R_2R_4 + R_3R_1 + R_3R_4$ и $\Delta_{\Gamma}^{\Pi} = R_2R_1 + R_2R_3 + R_4R_1 + R_4R_3$.

Нахождение определителя по формуле (3.9). Пересечением двух выражений $(\Delta_{\Pi}^{\Gamma} \cap \Delta_{\Gamma}^{\Pi})$ будет сумма двух одночленов, которые встречаются в обоих выражениях: R_1R_2 и R_3R_4 .

Для одночлена R_1R_2 выполним следующие операции: 1) выделим в схеме на рис. 3.7, а элементы R_1 и R_2 , которые присутствуют в одночлене; 2) нейтрализуем R_3 и R_4 , которые в одночлене отсутствуют. Поскольку для сопротивлений выделением является удаление элемента из схемы, а нейтрализацией является замена элемента идеальным проводником, в результате получим схему, в которой генератор и приемник направлены к разным узлам. Следовательно, знак этого одночлена – отрицательный.

Аналогично для одночлена R_3R_4 выполним следующие операции: 1) выделим в схеме на рис. 3.7, а элементы R_3 и R_4 , которые присутствуют в одночлене; 2) нейтрализуем R_1 и R_2 , которые в одночлене отсутствуют. В результате получим схему, в которой генератор и приемник направлены к одному и тому же узлу. Значит, знак этого одночлена – положительный.

Отсюда: $(\Delta_{\Pi}^{\Gamma} \cap \Delta_{\Gamma}^{\Pi})^{\pm} = R_3 R_4 - R_1 R_2$. Полное выражение определителя будет равно:

$$\Delta = K(R_3 R_4 - R_1 R_2) + (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_4 + R_3 R_4).$$

Нахождение определителя по формуле (3.13). Пересечением двух выражений $(\Delta_{\Pi}^{\Gamma} \cap \Delta_{\Gamma}^{\Pi})$ будет сумма двух одночленов, которые встречаются в обоих выражения: $R_2 R_1$ и $R_3 R_4$.

Разность выражений $(\Delta_{\Gamma}^{\Pi} \setminus \Delta_{\Pi}^{\Gamma})$ будет равна всем тем выражениям, которые присутствуют в Δ_{Γ}^{Π} , но при этом отсутствуют в $(\Delta_{\Pi}^{\Gamma} \cap \Delta_{\Gamma}^{\Pi})$. Таких одночленов всего два, это $R_2 R_3$ и $R_4 R_1$.

Теперь определим знаки одночленов входящих в пересечение определителей таким же образом, как и в предыдущем примере. Получим с учетом знаков: $R_3 R_4 - R_1 R_2$. Полное выражение определителя по формуле (3.13) имеет вид:

$$\Delta = R_3 R_4 (1 + K) + R_1 R_2 (1 - K) + (R_2 R_3 + R_1 R_4).$$

Анализ примеров. Как видно из примеров и формул (3.8)–(3.11), новый способ выделения УИ выгоднее использовать для ИНУН и ИТУТ, поскольку формулы (3.8)–(3.9) приводятся к виду (3.12)–(3.13) и для выделения этих УИ потребуется найти определители лишь двух схем. В то же время для выделения ИТУН и ИНУТ по формулам (3.10) и (3.11) необходимо найти определители трех схем.

Если обратиться к формулам (3.12) и (3.13), то можно заметить что все необходимые одночлены для выражения определителя содержатся в одном выражении – в выражении определителя схемы, полученной нейтрализацией ИНУН или ИТУТ.

Было замечено, что найти выражение B можно не только из формулы (3.7). Если еще раз вернуться к алгоритму определения знака одночлена, то можно заметить, что в результате выполнения всех пунктов этого алгоритма на последнем шаге мы получаем схему, состоящую только из этого УИ. Очевидно, что если одночлен принадлежит выражению B , то эта схема из УИ будет соответствовать схеме, изображенной на рис. 3.4, б. Если же этот одночлен принадлежит выражению C , то схема будет соответствовать схеме на рис. 3.4, в.

Таким образом, чтобы получить выражение B достаточно найти лишь один определитель либо Δ_{Π}^{Γ} , либо Δ_{Γ}^{Π} . Затем следует определить, принадлежит ли одночлен выражению B и, если принадлежит, то какой знак имеет. Для того, чтобы выделить ИНУН и ИТУТ, достаточно найти лишь один определитель – определитель, полученный при нейтрализации этого УИ. Для выделения же ИТУН и ИНУТ достаточно найти лишь выражения двух определителей – определитель схемы, полученной при нейтрализации УИ и одного из двух определителей либо Δ_{Π}^{Γ} , либо Δ_{Γ}^{Π} . Данное свойство выделения параметров ИНУН и ИТУТ может быть использовано для структурного синтеза электрических цепей по символьному выражению схемного определителя [12].

Итак, на основе теоретико-множественного подхода получена формула выделения параметров, учитывающая особенности нейтрализации управляемых источников различных типов и позволяющая по сравнению с известными формулами глубже постичь природу активных электрических цепей. Эти формулы выделения УИ, в отличие от ранее рассмотренных формул, не используют понятия НУИ и позволяют в случае ИТУТ и ИНУН из результата их нейтрализации получить определитель схемы.

3.4. УСЛОВИЯ ВЫРОЖДЕНИЯ СХЕМЫ И АЛГОРИТМ РАЗЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Пусть линейная электрическая схема (ЛЭС) содержит, кроме двухполюсных элементов, управляемые источники (УИ) всех четырех типов, а также взвешенные ориентированные нулоры – неудаляемые управляемые источники (НУИ). НУИ является предельным случаем УИ при наложении запрета на его удаление из схемы (нейтрализацию). В отличие от традиционных – неориентированных норатора и нуллатора, ГНУИ и ПНУИ присваиваются номера, отождествляющие их с одним и только одним НУИ.

Использование понятия НУИ упрощает анализ схем с идеальными операционными усилителями, не требуя предварительного формирования общего символьного выражения и трудоемкого выполнения предельного перехода. Параметры идеальных операционных усилителей заведомо являются сомножителями и при числителе, и при знаменателе схемной функции. Следовательно, поместив в схему НУИ вместо идеальных операционных усилителей и придав параметрам НУИ значения, равные единице, можно избежать необходимости их последующего сокращения.

Схема не считается несвязной, если имеет с некоторой своей подсхемой только управляющие связи (обусловленные идеальными трансформаторами, взаимноиндуктивностями, УИ, НУИ, и т. д.). Перед анализом такой схемы ее следует преобразовать к связной схеме путем объединения в один узел нескольких произвольных узлов, взятых по одному из каждой подсхемы, имеющей с другими подсхемами только управляющие связи. Такое топологическое преобразование является эквивалентным, то есть не изменяет определитель и не влияет на результат решения задачи анализа. Например, если подсхемы связаны только управляющими связями, как показано на рис. 3.8 (слева), то следует соединить их в одном узле, как показано на рис. 3.8 (справа).

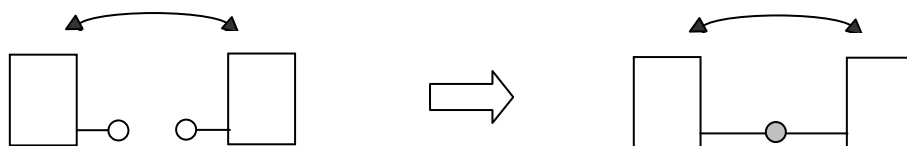


Рис. 3.8. Подсхемы с управляющими связями

Условие невырожденности схемы – условие отличия от нуля ее определителя – является достаточным условием существования и единственности решения задачи анализа ЛЭС [95, 98]. Схемы, содержащие УИ и НУИ, могут быть вырожденными, несмотря на выполнение свойства связности. Сформулируем общий критерий вырождения.

Теорема: Произвольная ЛЭС является вырожденной при выполнении хотя бы одного из трех топологических условий: 1) схема несвязна; 2) в схеме имеется хотя бы один контур, образованный исключительно генераторами напряжения и ГНУИ или исключительно приемниками тока и ПНУИ; 3) схема содержит сечение, включающее только генераторы тока и ГНУИ или только приемники напряжения и ПНУИ.

Частные случаи второго и третьего пунктов теоремы для контуров и сечений, образованных одним элементом (ГНУИ или ПНУИ) иллюстрируются на рис. 3.9.



Рис. 3.9. Вырождение схемы в результате размыкания и замыкания ГНУИ или ПНУИ

Случаи вырождения на рис. 3.9 обобщаются следствием теоремы о вырождении схемы, образованной исключительно НУИ.

Следствие 1: В невырожденной схеме с НУИ все ГНУИ должны образовывать дерево схемы, а ПНУИ входить в его дополнение и наоборот [98].

Частные случаи второго и третьего пунктов теоремы для контуров и сечений, образованных одним элементом (генератором напряжения, приемником тока, источником тока и приемником напряжения) иллюстрируются на рис. 3.10.

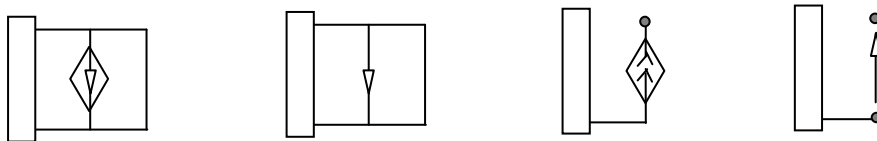


Рис. 3.10. Вырождение схемы в результате замыкания и размыкания элементов

Более общие случаи контуров и сечений, вырождающих схему, приводятся на рис. 3.11 – 3.14.

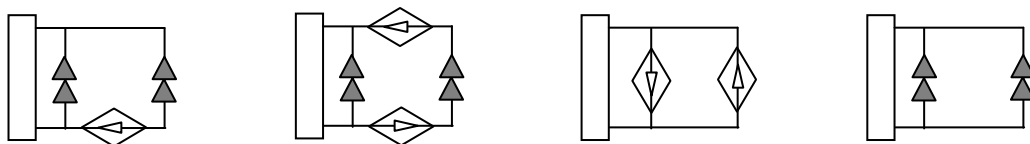


Рис. 3.11. Вырожденные схемы с контуром из генераторов напряжения и ГНУИ

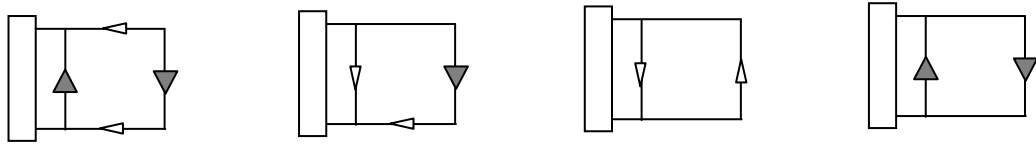


Рис. 3.12. Вырожденные схемы с контуром из приемников тока и ПНУИ

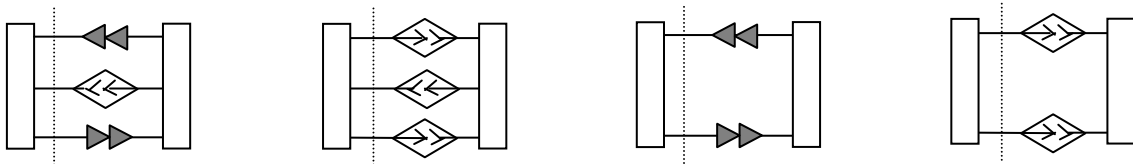


Рис. 3.13. Вырожденные схемы с сечением из генераторов тока и ГНУИ

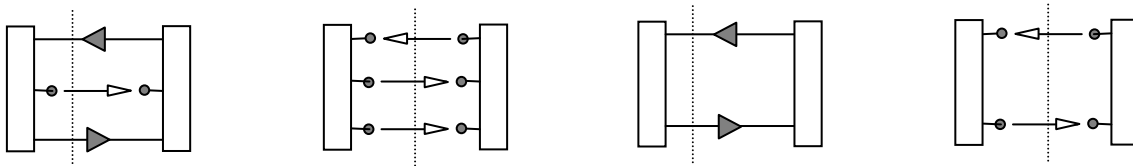


Рис. 3.14. Вырожденные схемы с сечением из приемников напряжения и ПНУИ

Алгоритм разложения схемных определителей. Нахождение определителей схем с НУИ опирается на следующие простые правила [70]: 1) изменение ориентации у ГНУИ или у ПНУИ влечет изменение знака определителя этой схемы; 2) взаимная замена номеров у двух ГНУИ или у двух ПНУИ также вызывает изменение знака определителя; 3) параллельное соединение одноименных и одинаково направленных (по отношению к общему узлу) ГНУИ и ПНУИ эквивалентно короткозамкнутой ветви; 4) последовательное встречное соединение одноименных ГНУИ и ПНУИ эквивалентно разомкнутой ветви.

Правила 3 – 4 иллюстрирует рис. 3.15.



Рис. 3.15. Образование короткозамкнутых и разомкнутых ветвей

В результате рекурсивного применения формул выделения параметров двухполюсных элементов и УИ – (2.7), (2.8), (3.3) или (3.4) – получается

символьное выражение определителя схемы или нуль (в случае вырожденной схемы). Если правил 1 – 4 недостаточно для раскрытия схемного определителя, то применяется формула выделения НУИ, обсуждаемая в подразделе 3.3, которая предельно упрощается, если генератор и приемник имеют общий узел (сечение).

Алгоритм разложения схемных определителей предусматривает рекурсивное выполнение следующей последовательности шагов для исходной схемы и производных от нее схем: 1) образование короткозамкнутых и разомкнутых ветвей в соответствии с правилами 1, 2 и рис. 3.15; 2) сведение параллельных проводимостей и последовательных сопротивлений; 3) проверка вырожденности схемы с использованием теоремы и ее следствия; 4) применение формул (2.7), (2.8) и (3.4) по отношению к элементам, удаление или стягивание которых приводит к вырожденным схемам (частные случаи формул (2.7) и (2.8)); 5) применение формулы (2.11); 6) применение формулы (2.12) по отношению к подсхемам, одна из которых является вырожденной при становится вырожденной при объединении внешних узлов; 7) применение формулы (2.12) в общем случае, предпочтение отдается варианту, при котором подсхемы содержат примерно одинаковое число элементов и узлов; 8) использование формул (2.7), (2.8) или (3.4) в общем случае; предпочтение отдается тому элементу, нейтрализация которого приводит к нейтрализации или преобразованию в НУИ наибольшего числа элементов.

При делении на подсхемы в пунктах 5-7 не допускается размещение одноименных генератора и приемника в различных подсхемах. В результате работы алгоритма формируется вложенное выражение схемного определителя или обнаруживается вырожденность схемы.

Нахождение символьных выражений откликов. Метод схемных определителей обычно предусматривает нахождение символьной схемной функции в виде отношения двух определителей: схемы числителя и схемы знаменателя. Однако в теории цепей, как правило, особенно при наличии нескольких независимых источников, представляет интерес нахождение откликов напряжения и тока, а схемная функция рассматривается как промежуточный результат анализа. Поэтому рассмотрим нахождение откликов непосредственно из формул (3.3) или (3.4), минуя нахождение схемных функций и применение каких-либо дополнительных формул.

Без потери общности будем рассматривать схему, содержащую источник эдс \underline{E} , источник тока \underline{J} и приемник с искомым током \underline{I} , которая показана на рис. 3.16, а. От этой схемы, используя формальную замену $\underline{I}/\underline{I}$ для множителя единицы при \underline{E} и \underline{J} нетрудно перейти к эквивалентной схеме на рис. 3.16, б [88].

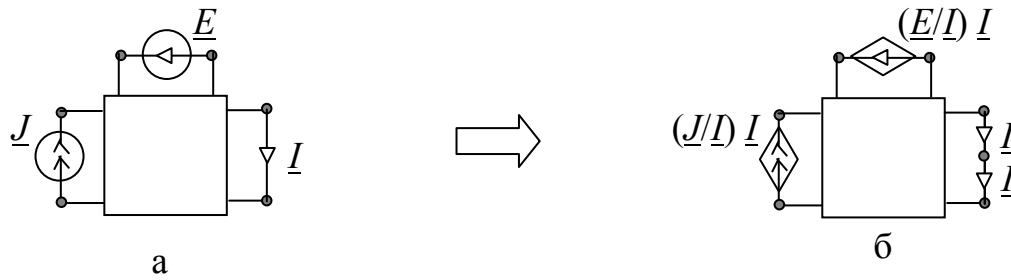


Рис. 3.16. Эквивалентная замена независимых источников на источники, управляемые током

Схема на рис. 3.16, б не содержит независимым источников, следовательно, ее определитель при токе \underline{I} , отличном от нуля, должен быть тождественно равен нулю, то есть схема на рис. 3.16, б является вырожденной. Применяя формулу (3.3) к схеме на рис. 3.16, а, получаем схемно-алгебраическое выражение

$$\left| \begin{array}{c} (E/I) \underline{I} \\ (J/I) \underline{I} \end{array} \right| = (J/I) \left| \begin{array}{c} \text{Circuit 1} \\ \text{Circuit 2} \end{array} \right| + (E/I) \left| \begin{array}{c} \text{Circuit 3} \\ \text{Circuit 4} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Circuit 5} \\ \text{Circuit 6} \end{array} \right|,$$

которое с учетом вырожденности схемы на рис. 3.16, б приводит к выражению для искомого отклика

$$\underline{I} = \frac{J \left| \begin{array}{c} \text{Circuit 1} \\ \text{Circuit 2} \end{array} \right| + E \left| \begin{array}{c} \text{Circuit 3} \\ \text{Circuit 4} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} \text{Circuit 5} \\ \text{Circuit 6} \end{array} \right|}. \quad (3.14)$$

Если ввести запрет на нейтрализацию приемника с искомым током, то схемно-алгебраическое выражение (10) записывается более компактно:

$$\underline{I} = - \left| \begin{array}{c} E \underline{I} \\ J \underline{I} \end{array} \right| \underline{I} / \left| \begin{array}{c} \text{Circuit 5} \\ \text{Circuit 6} \end{array} \right|, \quad (3.15)$$

где символ \underline{I} , который помечает схемный определитель, указывает на вырождение всех схем, образованных при его раскрытии и не содержащих приемника с током \underline{I} . Это означает, что слагаемые числителя могут содержать в качестве сомножителей, либо \underline{J} , либо \underline{E} , но не произведение \underline{EJ} , поскольку последовательное включение двух ПНУИ порождает вырожденную схему согласно следствию 1.

Аналогично находится САВ для отклика напряжения в схеме на рис. 3.17, а.

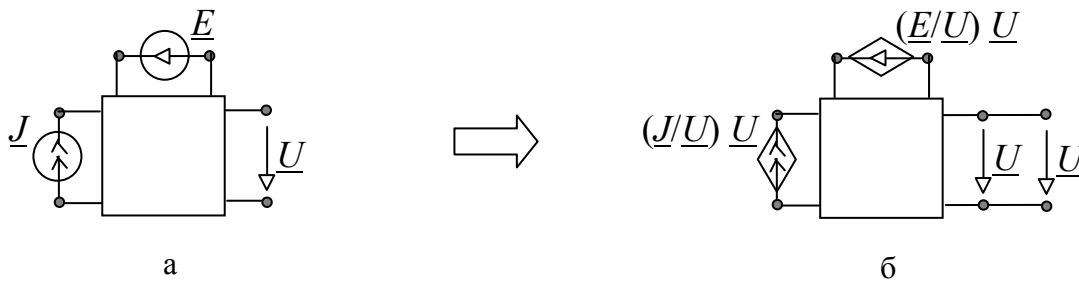


Рис. 3.17. Эквивалентная замена независимых источников на источники, управляемые напряжением

Опуская промежуточные выкладки, получаем

$$\underline{U} = - \left[\begin{array}{c} \underline{E} \underline{U} \\ \underline{J} \underline{U} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \underline{U} \\ \underline{U} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \underline{U} \\ \underline{U} \end{array} \right], \quad (3.16)$$

где символ \underline{U} , который помечает схемный определитель, указывает на вырождение всех схем, образованных при его раскрытии и не содержащих приемника с напряжением \underline{U} . Это означает, что слагаемые числителя могут содержать в качестве сомножителей, либо \underline{J} , либо \underline{E} , но не произведение \underline{EJ} , поскольку параллельное включение двух ПНУИ порождает вырожденную схему согласно следствию 1.

Пример анализа активной RC-цепи с многопетлевой обратной связью. Анализируемая цепь и ее схема замещения [13] показаны на рис. 3.19.

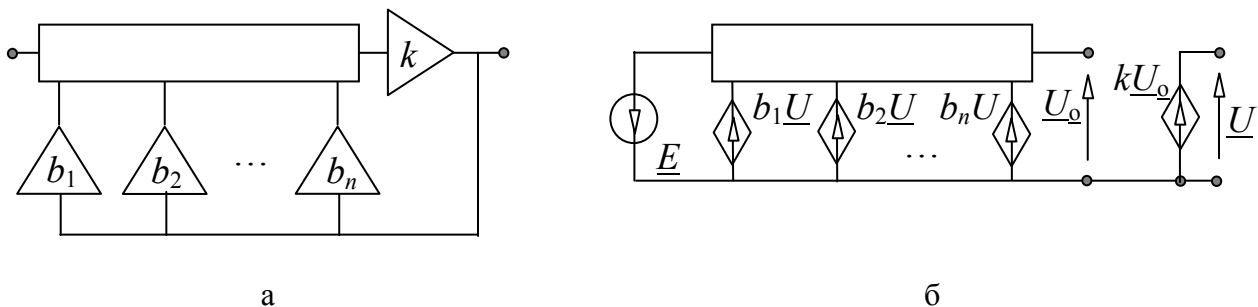


Рис. 3.18. Активная RC-цепь (а) и ее схема замещения (б)

аргументами которых являются отношения мнимой и действительной частей числителя и знаменателя.

Мнимая и действительная части комплексного выражения числителя и знаменателя находятся из определителя операторной матрицы узловых проводимостей с помощью трудоемкой сортировки слагаемых по признаку наличия или отсутствия в них мнимой единицы или из той же операторной матрицы с помощью теоремы об определителе суммы двух матриц [49]. Недостатками обоих методов являются их трудоемкость, обусловленная составлением уравнений, и наличие избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых из-за повторения одного и того же параметра в элементах матрицы.

Избежать указанных недостатков можно, используя метод схемных определителей, исключая появление избыточных слагаемых, и применяя алгоритм, программно формализующий нахождение порядка сложности произвольной активной электрической цепи и алгоритм построения полиномиальных схемных функций электронных цепей [36]. В последнем алгоритме полиномиальные коэффициенты должны находиться не по порядку номеров, а отдельно для четных и нечетных степеней оператора p . Эти коэффициенты образуют действительную и мнимую части определителя соответственно.

Нахождение порядка сложности произвольной активной электрической цепи состоит из двух этапов [36]. Первым этапом является определение максимальной и минимальной степеней оператора по следующим формулам

$$n_{max} = n_C + n_L - n_{SL} - n_{KC}, \quad (3.17)$$

$$n_{min} = n_{SC} + n_{KL}, \quad (3.18)$$

где n_C , n_L – число конденсаторов и катушек индуктивности; n_{SL} , n_{KC} – число обобщенных индуктивных сечений и емкостных контуров соответственно, а n_{SC} и n_{KL} – соответственно число обобщенных емкостных сечений и индуктивных контуров. Вторым этапом является проверка невырожденности коэффициентов степеней, полученных на первом этапе и окончательное заключение о порядке сложности цепи. Проверка заключается в поиске хотя бы одного производного схемного определителя без вырожденных сечений и контуров.

Алгоритм формирования полиномиальных схемных функций электронных цепей позволяет находить коэффициенты с учетом правил оптимального построения выражений, при этом в первую очередь учитываются элементы, подлежащие нейтрализации или выделению по частным формулам (содержащим одно из двух слагаемых). Степень слагаемых определителя контролируется неявным образом – без развертывания выражений – на основе показателя степени, который присваивается каждой паре скобок. Она появляется после выделения любого элемента. При выделении реактивных элементов вновь образующейся паре скобок присваивается показатель степени на единицу больший, чем у ближайшей внешней пары скобок, а при выделении неактивных элементов, показатель степени будет такой же. Если показатель степени скобок превышает степень искомого коэффициента, то эта пара скобок с соответствующим фрагментом формулы стирается. Стирается также

выражение, из которого заведомо невозможно получить искомую степень. Оставшиеся безреактивные схемные определители в скобках с искомым показателем степени преобразуются к символьным выражениям.

Предлагаемый алгоритм предусматривает поэлементное нахождение мнимой и действительной частей символьного определителя независимо друг от друга на основе одной и той же схемы числителя или знаменателя схемной функции. Схема числителя получается из исходной с помощью замены независимого источника норатором (генератором неудаляемого управляемого источника), а приемника отклика нуллатором (приемником неудаляемого управляемого источника). Схема знаменателя – путем нейтрализации независимого источника и приемника отклика.

Главными этапами формирования частей определителя является нахождение максимальной и минимальной степеней полинома, и нахождение полиномиального коэффициента заданной степени оператора p . Определение порядка сложности электрической цепи необходимо для исключения затрат на вычисление заведомо вырожденных определителей.

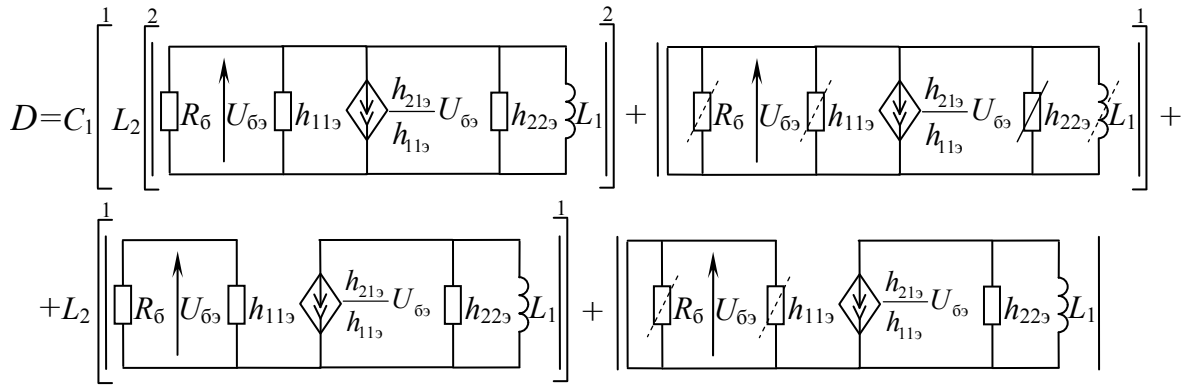
Алгоритм нахождения действительной части символьного определителя

1. Найти исходную схему числителя или знаменателя по выше изложенным правилам.
2. По алгоритму определения порядка полинома [36] сформировать диапазон значений коэффициента $k = n_{\min} \dots n_{\max}$.
3. По алгоритму [36] найти выражения коэффициентов полинома для каждого четного значения степени k из диапазона в п. 2.
4. Умножить каждое выражение коэффициента полинома на переменный множитель $j^k \omega^k$, где j и ω – мнимая единица и циклическая частота соответственно.
5. Сумма выражений, сформированных в п. 4, является вещественной частью символьного определителя.

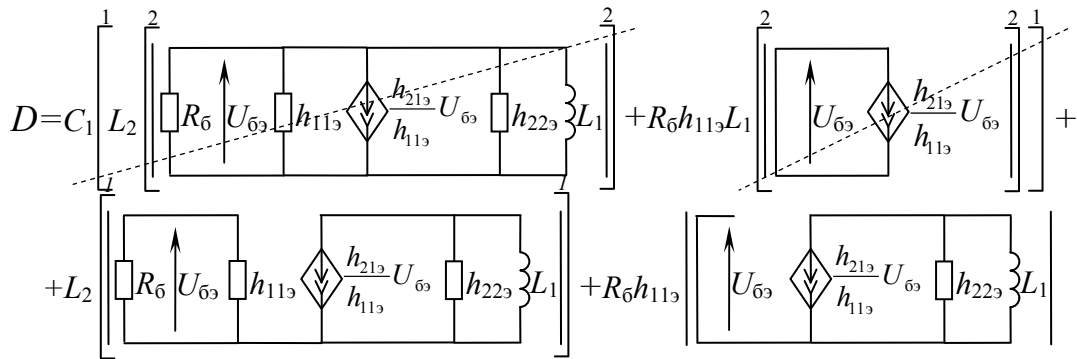
Для нахождения мнимой части определителя необходимо в п. 3 вместо четных значений степени k использовать нечетные, а в п. 4 умножать выражения из предыдущего пункта на множитель $-j^{k+1} \omega^k$.

Таким образом, трудоемкая сортировка символьных слагаемых при нахождении частей комплексного выражения заменяется непосредственным формированием коэффициентов для четных и нечетных степеней оператора p .

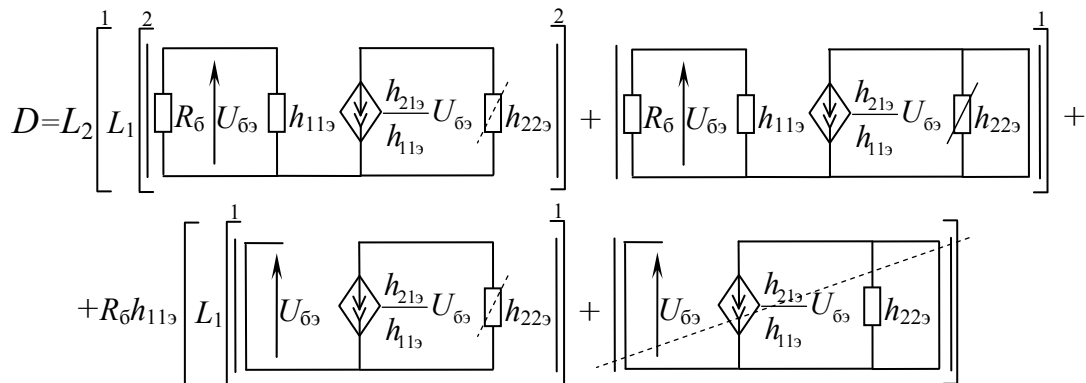
Пример нахождения мнимой и действительной частей определителя. Рассмотрим схему замещения транзисторного автогенератора на рис. 3.19.



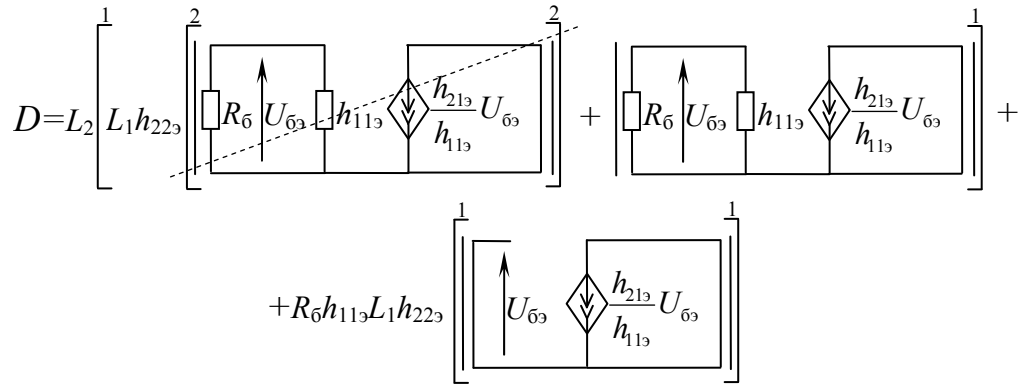
В соответствии с частными формулами удаления и выделения элементов, содержащими одно из двух слагаемых, преобразуем САВ к виду



Здесь первые две схемы вычеркнем, так как показатели степени скобок у них превышают $k = 1$. Теперь выделим L_1 из последних двух схем, в результате получим



Последний определитель вычеркнут, так как он не позволяет получить заданную степень полинома. Запишем полученную САВ с учетом выделения и удаления элементов по частным формулам



Проверив показатели степени скобок на предмет превышения $k = 1$, удалим первое САВ. Раскроем оставшиеся определители, в результате получим

$$b_1 = L_2 \left[\frac{h_{213}}{h_{113}} \left(\begin{array}{c} \text{Circuit 1} \\ \text{Circuit 2} \end{array} \right) + R_6 h_{113} L_1 h_{223} \left(\begin{array}{c} \text{Circuit 3} \\ \text{Circuit 4} \end{array} \right) \right]$$

Таким образом, искомый коэффициент полинома имеет вид

$$b_1 = L_2 (R_6 + h_{113}) + R_6 h_{113} L_1 h_{223}.$$

Коэффициент полинома степени $k = 3$ найдем аналогично

$$b_3 = C_1 L_2 L_1 (-R_6 (h_{213} + h_{113} h_{223}) + 1) + h_{113}.$$

4. Умножим b_1 и b_3 на переменный множитель $(-j^{k+1} \omega^k)$. Сложив полученные выражения, получим искомую мнимую часть

$$\text{Im}(\Delta) = (L_2 (R_6 + h_{113}) + R_6 h_{113} L_1 h_{223}) \omega - C_1 L_2 L_1 (-h_{213} R_6 + R_6 h_{113} h_{223} + R_6 + h_{113}) \omega^3. \quad (3.19)$$

Построение вещественной части символьного определителя осуществляется на основе коэффициентов при четных степенях оператора p . В результате она имеет вид

$$\text{Re}(\Delta) = R_6 h_{113} - (C_1 R_6 h_{113} (L_1 + L_2) - L_2 L_1 h_{223} (R_6 + h_{113})) \omega^2. \quad (3.20)$$

Выражения, эквивалентные (3.3) и (3.4), могут быть получены из узлового символьного определителя с помощью трудоемких операций разворачивания и сортировки слагаемых. При этом возникают избыточные взаимно уничтожающиеся слагаемые, а результирующие выражения не являются рациональными (содержат отрицательные степени параметров), что осложняет аналитическое исследование символьного выражения.

3.6. ВЫВОДЫ

Для эффективного символьного анализа электрических цепей с произвольным набором линейных элементов достаточно пяти формул разложения схемных определителей: (2.7) – (2.8) и (3.3) или (3.4), а выражения вида (3.15) и (3.16) легко могут быть получены как решения уравнения $\Delta=0$. Минимизация объема схемно-алгебраических выкладок и сложности результирующих выражений достигается использованием предложенного алгоритма.

Формулы (3.3) и (3.4) обобщают формулы (2.7) и (2.8), поскольку проводимость и сопротивление являются частными случаями источника тока, управляемого напряжением, и источника напряжения, управляемого током, соответственно. Предназначение формул (2.11) и (2.12) состоит в том, чтобы уменьшить объем проводимых выкладок и сложность формируемых выражений в результате деления исходной схемы и производных от нее схем на части.

Формально, если не ставить задачу повышения эффективности символьного анализа, единственной формулы выделения параметра управляемого источника (3.3) или (3.4), то есть пятой формулы метода схемных определителей достаточно, чтобы выполнить анализ линейной инвариантной во времени цепи с сосредоточенными элементами и произвольным числом воздействий, минуя как отображение схем матрицами или графами, так и формирование схемных функций.

4. ФОРМИРОВАНИЕ СИМВОЛЬНЫХ ОТКЛИКОВ ДЛЯ ЦЕПЕЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Традиционный метод наложения предполагает запись выражения отклика, в котором каждое воздействие участвует единственный раз, то есть присутствует в «явном» виде. При этом символьный топологический анализ линейных электрических цепей с двумя и более независимыми источниками осуществляется с помощью принципа наложения (1.4). Передаточная от ветви i к ветви j функция $F_{ji} = N_{ji}/D$, где N_{ji} – числитель схемной функции (СФ) F_{ji} , а D – ее знаменатель (определитель схемы). Отсюда из выражения (2.4) отклик – напряжение или ток j -й ветви – можно записать в виде

$$O_j = \sum_{i=1}^n N_{ji} x_i / D, \quad (4.1)$$

где x_i – напряжение или ток i -го источника соответствующего воздействия (всего n источников). Переменные O_j , N_{ji} , x_i , D представлены в комплексной или операторной форме для анализа цепи в установившемся гармоническом или переходном режимах соответственно.

Формула (4.1) позволяет получить символьные выражения отклика (СВО) в виде дробно-рационального выражения, числитель которого представляется многочленом канонической формы [40] относительно воздействующих величин. При этом числитель каждой СФ N_{ji} строится отдельно. Такой подход, во-первых, требует топологического исследования n схем числителей СФ, что усложняет процесс анализа, а во-вторых, препятствует построению компактного СВО, экономичного по числу вычислительных операций [66, 67]. Поэтому желательно формировать числитель СВО в виде определителя одной схемы, как это выполняется для знаменателя [66, 91]. Единая схема числителя позволяет записать символьное выражение числителя в общем неканоническом виде, что обеспечивает уменьшение числа операций за счет выделения параметров по критерию максимального участия [64].

Для получения единой схемы числителя в [34] предлагается вместо каждого независимого источника ввести компенсирующий элемент – источник, который управляется ветвью единственного опорного источника. Поэтому в неявном методе наложения (НМН) параметры независимых источников могут выделяться в произвольном порядке, чем обеспечивается получение компактного выражения отклика по сравнению не только с развернутым выражением Кирхгофа, но и выражением, свернутым по явному методу наложения.

Однако в этом состоит лишь одна из форм реализации неявного принципа наложения, предложенная для повышения эффективности символьного анализа и диагностики ЛЭЦ. Ниже показано, как уменьшить сложность формируемых выражений, используя исторически первую, предложенную Кирхгофом, запись отклика в форме с неоднократным присутствием каждого воздействия, то есть в «неявной» форме.

По-видимому, неслучайно лишь в конце своей знаменитой статьи [91] Кирхгоф рассмотрел явную форму представления отклика. Неявная форма Кирхгофа отличается от современной версии НПН тем, что параметры независимых источников или их сумма завершают слагаемые выражения в виде последних сомножителей. Этим не допускается произвольный порядок выделения источников и ограничивается качество свертки. Однако, как будет показано ниже, алгебраические суммы параметров источников в выражении отклика отражают физическую сторону процессов, происходящих в электрической цепи, что важно при ее исследовании и диагностике.

4.1. КОМПАКТНЫЕ (НЕЯВНАЯ И ЯВНАЯ) ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОТКЛИКОВ

Свернутая форма обеспечивает многократное сокращение числа арифметических операций, требуемых для вычисления выражения. Например, для схемы Кирхгофа на рис. 4.1, а числитель тока I_6 в неявной и явной форме, построенный путем первоочередного выделения сопротивлений и НИ соответственно, имеет вид

$$N_{I_6} = R_2[(R_1 + R_3)(E_4 - E_5 + E_6) + R_5(E_1 + E_4 - E_3 + E_6)] + R_1[R_3(E_4 - E_5 + E_6) + (R_4 + R_5)(E_2 - E_3 + E_6)] + R_4[R_3(E_2 - E_1 - E_5 + E_6) + R_5(E_2 - E_3 + E_6)]; \quad (4.2)$$

$$N_{I_6} = [R_5(R_1 + R_4) + R_4(R_1 + R_3)]E_2 + (R_5R_2 - R_4R_3)E_1 + [R_2(R_1 + R_3 + R_5) + R_1R_3]E_4 - [R_5(R_2 + R_1 + R_4) + R_1R_4]E_3 - [R_3(R_2 + R_1 + R_4) + R_1R_2]E_5 + [(R_2 + R_4)(R_1 + R_3 + R_5) + R_1(R_3 + R_5)]E_6. \quad (4.3)$$

Выражения числителя в неявной (4.2) и явной (4.3) форме содержат 9 и 18 умножений, 21 и 23 аддитивных операции соответственно. Выражение (4.1) содержит в 2 раза меньше умножений – наиболее трудоемких операций. Аналогичные развернутые выражения в неявной и явной форме (2.5) и (2.6) обладают существенно большей вычислительной сложностью.

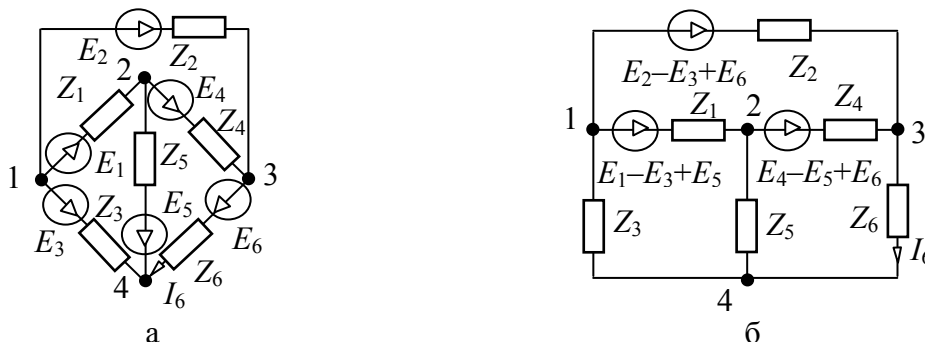


Рис. 4.1. Схема Кирхгофа: исходная (а); после эквивалентного переноса источников (б)

Неявную форму для числителя отклика можно получить и с помощью операции переноса НИ напряжения через сечение или НИ тока по контуру [50]. Операции переноса источников сокращают число НИ. Последующее применение к эквивалентной схеме явного метода наложения приводит к неявной формуле. Однако такая формула содержит избыточные взаимно уничтожающиеся слагаемые. Для преобразованной схемы Кирхгофа (рис. 4.1, б) выражение числителя тока I_6 имеет вид

$$N_{I_6} = (R_2R_5 - R_3R_4)(E_1 - E_3 + E_5) + [R_5(R_1 + R_4) + R_4(R_1 + R_3)](E_2 - E_3 + E_6) + [R_2(R_1 + R_3 + R_5) + R_1R_3](E_4 - E_5 + E_6). \quad (4.4)$$

Формула (4.4) содержит 9 умножений и 15 аддитивных операций соответственно. Аддитивных операций в ней в 1,5 раза меньше, чем в неявной формуле (4.2). В то же время она содержит две пары взаимно уничтожающихся слагаемых $\pm E_4R_3R_4$ и $\pm E_5R_1R_5$, поэтому формулу (4.4) нельзя считать оптимальной.

4.2. ПРАВИЛА КИРХГОФА И ВЫЯВЛЕНИЕ РЕЗЕРВА СВЕРТКИ

Рассмотрение выражений (4.2) и (4.3) показывает, что неявную форму (4.2) можно свернуть еще более компактно, минуя образование взаимно уничтожающихся слагаемых. Действительно, сомножители $E_4 - E_5 + E_6$ и $E_2 - E_3 + E_6$ участвуют в выражении более одного раза. Другие два сомножителя в виде алгебраической суммы источников: $E_1 + E_4 - E_3 + E_6$ и $E_2 - E_1 - E_5 + E_6$ встречаются по одному разу. Четыре вида сомножителей обусловлены тем, что в схеме на рис. существует четыре контура, проходящих через ветвь с искомым током.

Для получения оптимальных формул числителя необходимо, чтобы каждый контур учитывался в формуле один раз. Однако контурное (пятое) правило Кирхгофа не предусматривает неявный учет НИ. На одновременном учете всех источников основано правило 4, использующее перебор ветвей схемы. Для удобства рассмотрения ниже повторяются формулы числителя отклика для схемы на рис. 4.1, а, полученные с помощью правил 4 и 5 Кирхгофа

$$N_{I_6} = R_1R_2(E_4 - E_5 + E_6) + R_2R_3(E_4 - E_5 + E_6) + R_2R_5(E_1 + E_4 - E_3 + E_6) + R_1R_4(E_2 - E_3 + E_6) + R_1R_3(E_4 - E_5 + E_6) + R_1R_5(E_2 - E_3 + E_6) + R_3R_4(E_2 - E_1 - E_5 + E_6) + R_4R_5(E_2 - E_3 + E_6). \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
I_6 = & [R_5R_2 + R_5R_3 + R_3R_2 + R_3R_4]E_1 + (R_5R_1 - R_3R_4)E_2 + [R_1R_2 + R_1R_4 + R_1R_5 + R_2R_4]E_3 + \\
& + [R_5R_1 + R_5R_2 + R_5R_3 + R_2R_3]E_4 + [R_4R_1 + R_4R_2 + R_4R_3 + R_1R_2]E_5 - \\
& - [R_1R_2 + R_1R_4 + R_1R_5 + R_3R_2 + R_3R_4 + R_3R_5 + R_2R_4 + R_2R_5]E_6.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Избыточность правила 5 проявляется в том, что один и тот же контур может находиться несколько раз для получения отклика от нескольких источников.

Это видно из выражения (4.6), например контур, не включающий R_3 и R_4 , повторяется (заново находится) четыре раза, поскольку произведение R_3R_4 учитывается в слагаемых при E_1 , E_2 , E_5 и E_6 .

Ниже обсуждаются усовершенствованные и обобщенные топологические правила, которые лишены указанных недостатков и вытекают из правил 4 и 5 Кирхгофа. Для общих формулировок целесообразно использовать, рассмотренный в разделе 2, идеальный элемент схемы, который отображает ветвь с искомым откликом и называется приемником тока или напряжения. Напомним, что приемник тока является идеальным проводником, а приемник напряжения – разомкнутой ветвью. Напряжение на приемнике тока и ток через приемник напряжения равны нулю.

Итак, топологические правила предусматривают получение компактных выражений в результате суммировании вкладов независимых источников, образующих контура или сечения с искомым откликом. В этом состоит физическая основа – равновесие в контуре и непрерывность в сечении – топологических правил Кирхгофа и Максвелла, а также их обобщений.

В предлагаемых ниже топологических формулах принцип наложения проявляется не традиционно (явно), когда результат представляет собой сумму вкладов от каждого независимого источника, когда параметры источников появляются один раз (то есть явно). При неявном наложении источников осуществляется учет воздействий, которые образуют контура или сечения с приемником тока или напряжения. Количество таких контуров и сечений определяется топологией схемы. Каждый контур или сечение обуславливает единственное слагаемое в числителе отклика.

По закону Кирхгофа для контура мы можем найти напряжение на приемнике. Если это напряжение падает на резисторе, то ток через него можно найти по закону Ома, следовательно, числитель отклика напряжения отличается от числителя отклика тока только сомножителем в виде параметра резистора. Контур касается нагрузочного резистора, поэтому этот резистор оказывается замкнутым при удалении ветвей контура и объединении его узлов. Поэтому в соответствии с МСО параметр нагрузочного резистора окажется общим множителем для определителя короткого замыкания этого контура. При нахождении тока, протекающего через нагрузочный резистор, он становится частью контура и удаление этого резистора невозможно, поэтому его параметр не учитывается в числителе выражения отклика.

С точки зрения второго закона Кирхгофа не вполне корректно включать в контур приемник тока. Однако в момент нахождения отклика приемник

обладает аномальными свойствами, то есть свойствами нуллатора – приемника НУИ, являясь одновременно и приемником тока, и приемником напряжения. В этом случае существенен только способ включения приемника – последовательно с резистором (для нахождения тока) или параллельно (для нахождения напряжения). Сделанные замечания позволяют сформулировать алгоритм нахождения числителя.

4.3. ПРАВИЛО КОНТУРОВ ДЛЯ ZE-СХЕМЫ

Заключается в выполнении следующих шагов.

1. В схеме перечисляются все контуры, содержащие источники напряжения и проходящие через выбранный приемник тока или напряжения. Для образования таких контуров может потребоваться стягивание ветвей. Вес контура равен сумме эдс, взятых с плюсом (минусом) при совпадении (несовпадении) их ориентации с током или напряжением приемника.

2. Для каждого контура находится определитель короткого замыкания, соответствующий схеме, полученной из исходной схемы в результате: 1) удаления всех ветвей контура; 2) объединения его узлов в один узел; 3) нейтрализации источников эдс.

3. Находится числитель отклика как сумма произведений определителей короткого замыкания на соответствующие веса контуров.

Если для разложения определителей короткого замыкания контуров использовать формулы выделения параметров по методу схемных определителей [], то по этому правилу получается следующая формула для числителя тока I_6 в схеме на рис. 4.1, а, которая воспроизведена на рис. 4.2.

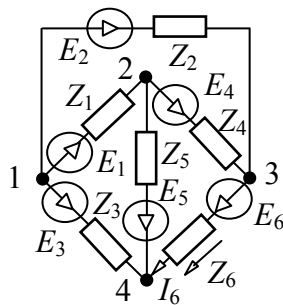


Рис. 4.2. Схема Кирхгофа

Для схемы на рис. 4.2 можно записать четыре уравнения по второму закону Кирхгофа, содержащих напряжение сопротивления ветви Z_6 : 1) $U_6 = E_4 - E_5 + E_6$; 2) $U_6 = E_2 - E_3 + E_6$; 3) $U_6 = E_1 - E_3 + E_4 + E_6$; 4) $U_6 = -E_1 + E_2 - E_5 + E_6$. Следовательно, существуют четыре «активных» контура. При нахождении тока I_6 необходимо включить приемник тока вместо стрелки тока у резистора Z_6 на рис. 4.2. Для образования первого контура следует стянуть резисторы Z_4, Z_5, Z_6 . Отсюда получаем вес этого контура: $(E_4 - E_5 + E_6)$. Третий контур получается при стягивании резисторов Z_1, Z_3, Z_4, Z_6 . Вес этого контура: $(E_1 - E_3 + E_4 + E_6)$.

Аналогично получаются веса второго и четвертого контуров: $(E_2 - E_3 + E_6)$ и $(-E_1 + E_2 - E_5 + E_6)$.

Определитель замыкания некоторого активного контура соответствует схеме, полученной в результате удаления ветвей контура и объединения его всех узлов в один узел, а также нейтрализации внешних по отношению к контуру источников. Для первого контура такая схема представляет собой параллельное соединение ветвей Z_1, Z_2, Z_3 (рис. 4.2). Его определитель: $Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2Z_3$. Для второго контура схемой, имеющей определитель замыкания, является параллельное соединение ветвей Z_1, Z_4, Z_5 (рис. 4.2). Определитель этой схемы: $Z_1(Z_4 + Z_5) + Z_4Z_5$.

Схемы замыкания для третьего и четвертого контуров, получаемые из схемы на рис. 4.2, состоят из двух замкнутых в одном узле резисторов: Z_2, Z_5 и Z_3, Z_4 соответственно. Определители этих схем равны Z_2Z_5 и Z_3Z_4 .

Отсюда получается искомый числитель для тока I_6 :

$$N_{I_6} = [Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2Z_3](E_4 - E_5 + E_6) + [Z_1(Z_4 + Z_5) + Z_4Z_5](E_2 - E_3 + E_6) + Z_2Z_5(E_1 - E_3 + E_4 + E_6) + Z_3Z_4(-E_1 + E_2 - E_5 + E_6).$$

$$N_{I_6} = [R_2(R_1 + R_3) + R_1R_3](E_4 - E_5 + E_6) + [R_1(R_4 + R_5) + R_4R_5](E_2 - E_3 + E_6) + R_2R_5(E_1 + E_4 - E_3 + E_6) + R_3R_4(E_2 - E_1 - E_5 + E_6).$$

(4.7)

При использовании программы CIRSYM получается эквивалентная формула для искомого числителя

$$N_{I_6} = \langle R1 * ((R2 + R3) * (-E5) + E4 + E6) + (R4 + R5) * (-E3) + E2 + E6 \rangle + R2 * (R5 * (-E3) + E1 + E4 + E6) + R3 * (-E5) + E4 + E6 \rangle + R4 * (R3 * (-E5) - (E1) + E2 + E6) + R5 * (-E3) + E2 + E6 \rangle \rangle. \quad (4.8)$$

По структуре и числу операций формула (4.8) совпадает с формулой (4.2), полученной по НМН вручную.

Неявная формула (4.7) содержит 10 умножений и 17 аддитивных операций, что близко к характеристикам (9 и 21 операция соответственно) неявных формул (4.2) и (4.8), полученных на основе формул выделения параметров сопротивлений и источников напряжения. Обратим внимание на то, что формула (4.7) оказывается конкурентоспособной, несмотря на использование частной формы свертки – представление выражения в виде суммы произведений пар скобок.

Выражения вида (4.7) можно сформировать автоматически с помощью программы CIRSYM. Для этого не потребуется перечислять контуры, проходящие через ветвь с искомым откликом. Веса контуров будут образовываться по мере разложения определителя по формулам выделения. Для получения определителя короткого замыкания, умножаемого на вес очередного контура, необходимо вычеркивать веса других контуров, а также подвыражения, умножаемые на эти контура. Таким образом, для получения одного отклика необходимо ρ раз вызвать программу CIRSYM, где ρ – число

контуров, то есть получение формул вида (4.7) сопряжено с существенно большими вычислительными затратами.

4.4. ПРАВИЛО СЕЧЕНИЙ ДЛЯ ZJ-СХЕМЫ

В силу принципа дуальности может быть сформулировано обобщенное топологическое правило для схем, содержащих источники тока. По закону Кирхгофа для сечения мы можем найти ток через приемник. Если этот ток, протекает через резистор, то напряжение на нем можно найти по закону Ома, следовательно, числитель отклика тока отличается от числителя отклика напряжения только множителем в виде параметра резистора. Подобно тому, как контур формально может включать как приемник напряжения, так и приемник тока, сечение может содержать как приемник тока, так и приемник напряжения. Физическое различие приемников проявляется только при нахождении знаменателя.

При размыкании сечения один из узлов нагрузочного резистора оказывается неподключенным, и его сопротивление (в соответствии с МСО) не окажется множителем в определителе размыкания для этого сечения. При нахождении напряжения, падающего на нагрузочном резисторе, этот резистор не войдет в сечение, то есть будет удален, поэтому его параметр появится в качестве множителя в числителе выражения отклика.

Главное заключается в том, что сечение из источников тока и приемника НУИ представляет собой особую подсхему. Во-первых, при отсутствии приемника НУИ такое сечение вырождает схему. Во-вторых, источники тока имеют внутреннее сопротивление, стремящееся к бесконечности, поэтому сопротивления, соединяющие узлы ветвей сечения и с той и с другой его стороны можно считать пренебрежимо малыми. Следовательно, каждое из рассматриваемых сечений представляет собой схему в виде параллельного соединения ветвей сечения в результате объединения соответствующих узлов внутри каждой из компонент, порожденных разрезанием схемы этим сечением.

Алгоритм разложения числителя по сечениям, дуальный контурному правилу, заключается в выполнении следующих шагов.

1. В схеме перечисляются все сечения с источниками тока, включающие ветвь с искомым током. Для образования таких сечений может потребоваться удаление ветвей. Вес сечения равен произведению сопротивлений ветвей, удаленных из схемы, и суммы источников тока, взятых с плюсом или минусом при совпадении или несовпадении их ориентации с током ветви.

2. Для каждого сечения находится определитель размыкания, соответствующий схеме, полученной из исходной схемы в результате: 1) удаления ветвей активного сечения; 2) удаления ветвей, не используемых на шаге 1 при образования сечения; 3) нейтрализации источников тока, не входящих в активное сечение.

3. Находится числитель отклика как сумма произведений определителей размыкания на соответствующие веса сечений.

Дуальные различия обобщенных правил заключаются в том, что для обеспечения работоспособности контура ни одна из его ветвей не должна замыкаться, а для работы сечения, наоборот, необходимо замкнуть узлы его соединения со схемой. Поэтому в первом случае используется определитель короткого замыкания, а во втором – определитель размыкания.

Следует обратить внимание на то, что размыкание сечения, в отличие от короткого замыкания контура, может привести к получению несвязной схемы. Чтобы восстановить связность схемы следует объединить ее компоненты в одном из узлов. В частном случае, когда сечение охватывает один узел, при размыкании сечения также возникают две компоненты, одной из которых является изолированный узел. Им можно пренебречь, поскольку его добавление ко второй компоненте не изменяет схему. Если контур с независимыми источниками может включать другие ветви, то перечисление сечений выполняется без учета других ветвей схемы. Поэтому параметры сопротивлений, которые удалены для образования сечения должны включаться в вес сечения.

Для примера использования правила сечений рассмотрим схему Кирхгофа (рис. 1) и между каждой парой ее узлов подключим источники тока, пронумерованные в соответствии с параллельными им ветвями: J_1, J_2, \dots, J_6 . Направления всех источников тока выбрано от узла с меньшим номером к узлу с большим номером. Эти направления для наглядности совпадают с условно положительными направлениями токов в ветвях.

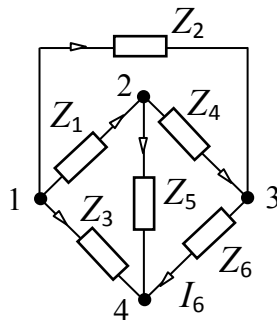


Рис. 4.3. Схема Кирхгофа без источников питания

Для этой схемы можно составить четыре уравнения по первому закону Кирхгофа относительно тока I_6 : 1) $I_6 = J_2 + J_4 - J_6$; 2) $I_6 = -J_3 - J_5 - J_6$; 3) $I_6 = J_1 + J_2 - J_5 - J_6$; 4) $I_6 = -J_1 - J_3 + J_4 - J_6$. Следовательно, существуют четыре «активных» сечения. Для образования первого сечения необходимо удалить резисторы Z_2 и Z_4 , а также стянуть резистор Z_6 . Отсюда получаем вес этого сечения: $Z_2 Z_4 (J_2 + J_4 - J_6)$. Третье сечение получается при стягивании резистора Z_6 и удалении резисторов Z_3 и Z_5 . Вес этого сечения $Z_1 Z_2 Z_5 (J_1 + J_2 - J_5 - J_6)$. Аналогично получают веса второго и четвертого сечений: $Z_3 Z_5 (-J_3 - J_5 - J_6)$ и $Z_1 Z_3 Z_4 (-J_1 - J_3 + J_4 - J_6)$.

Определитель размыкания некоторого сечения соответствует схеме, полученной в результате удаления из исходной схемы как ветвей сечения, так и ветвей, использованных для образования сечения. Для первого сечения такая

схема представляет собой треугольник ветвей Z_1, Z_3, Z_5 (рис. 4.3). Его определитель: $Z_1+Z_3+Z_5$. Для второго сечения схема с определителем размыкания является треугольником ветвей Z_1, Z_2, Z_4 (рис. 4.3). Определитель этой схемы: $Z_1+Z_2+Z_4$.

Схемы размыкания для третьего и четвертого сечений получаются из схемы на рис. 4.3 путем удаления резисторов Z_1, Z_2, Z_5, Z_6 и Z_1, Z_3, Z_4, Z_6 соответственно. Каждая из полученных схем состоит из двух изолированных друг от друга резисторов: Z_3, Z_4 и Z_2, Z_5 соответственно. Эти схемы несвязные, поэтому их компоненты следует соединить в одном из узлов (любом). Определители полученных схем тождественно равны единице.

Следует отметить, что в случае удаления первых двух сечений также получаются несвязные схемы, в которых одна из компонент является изолированным узлом.

Отсюда получается искомый числитель для тока I_6 :

$$\begin{aligned} N_{I_6} = & (Z_1+Z_3+Z_5)Z_2Z_4(J_2+J_4-J_6) \\ & + (Z_1+Z_2+Z_4)Z_3Z_5(-J_3-J_5-J_6) \\ & + Z_1Z_2Z_5(J_1+J_2-J_5-J_6) \\ & + Z_1Z_3Z_4(-J_1-J_3+J_4-J_6). \end{aligned}$$

При использовании программы CIRSYM получается эквивалентная формула для искомого числителя:

$$\begin{aligned} N_{I_6} = & \langle R1*(R2*(R4*(J2+J4-(J6))+R5*(J1+J2-(J5)-(J6)))+R3*(R4*(-(J1)-(J3)+J4- \\ & (J6))+R5*(-(J3)-(J5)-(J6))))+ \\ & R2*(R3*(R4*(J2+J4-(J6))+R5*(-(J3)-(J5)-(J6)))+ \\ & R5*R4*(J2+J4-(J6)))+R4*R3*R5*(-(J3)-(J5)-(J6)) \rangle. \end{aligned}$$

4.5. ОБОБЩЕНИЯ ПРАВИЛ ДЛЯ YZ-СХЕМ

Представляет интерес рассмотрение аналогичных правил для YZ-схем.

Правило контуров для YZE-схемы отличается от правила контуров для ZE-схемы только нахождением веса на первом шаге. Вес контура равен произведению проводимостей, входящих в контур, и суммы эдс, взятых с плюсом или минусом при совпадении или несовпадении их ориентации с током ветви.

Правило контуров для YZJ-схемы не отличается от правила контуров для ZJ-схемы, поскольку удаленные для образования сечения проводимости не учитываются в весе сечения.

Оба обобщения правил для однородного базиса вытекают из формул выделения сопротивления и проводимости. Шаги 2 и 3 не претерпевают изменений, поскольку предполагается, что определители короткого замыкания и размыкания получаются на основе формул Фойснера.

Поскольку в основе правила контуров лежит первый закон Кирхгофа, а в основе правила сечений – второй закон, то использование этих правил для анализа схем с источниками тока и источниками напряжения, соответственно, невозможно.

Обобщение предложенных топологических правил для анализа схем с УИ, по-видимому, не представляет практического интереса, поскольку потребуется трудоемкое нахождение цепей контуров передачи [1] и «цепей сечений передачи» (до сих пор не изученных).

Как видно, разложение числителя по контурам, которые могут содержать несколько независимых источников, обобщает разложение Фойснера [82, 83] (которое часто приписывают Мейсону [45]). В разложении Фойснера генератор и приемник приобретают статус генератора и приемника НУИ. В МСО нахождение контуров не выполняется, а осуществляется выделение двухполюсных элементов до получения простейших контуров в виде параллельного (или последовательного) соединения генератора и приемника НУИ.

При наличии в схеме нескольких НИ можно поступить аналогично, в результате выделения двухполюсных элементов получится схема, содержащая один из контуров, учитываемых в обобщенном разложении числителя. Как уже отмечалось, эта схема-контур получила название многомерного источника напряжения, управляемого нуллатором [13, 88]. Определитель этой схемы будет равен весу контура согласно второму шагу вышеприведенных контурных правил.

4.6. АКТИВНЫЕ КОНТУРЫ И СЕЧЕНИЯ – ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРАВИЛ

Итак, последовательное соединение независимых источников напряжения и нуллатора образует многомерный источник напряжения, управляемый нуллатором. Дуальное схемное образование в виде сечения из параллельного соединения независимых источников тока и нуллатора является многомерным источником тока, управляемым нуллатором. Определители многомерных источников напряжения и тока будут равны весу соответствующего контура или сечения согласно второму шагу вышеприведенных правил.

Контур и сечение, образующие многомерные источники, логично назвать *активными*, поскольку они могут существовать независимо от оставшейся части схемы. Ничего не оказывает влияния на контур, замыкающий оставшуюся часть схемы, или на сечение, размыкающее схему на несвязные части.

Фундаментальным является утверждение, что только активные контура и сечения схемы делают вклад в отклик. В этом заключается физический смысл топологических правил. Назначение оставшейся части схемы состоит в создании условий для образования активных контуров или сечений. Такие условия создаются удалением или стягиванием элементов в соответствии с формулами выделения. Для создания активного контура требуется стянуть

входящие в него сопротивления и проводимости. При этом параметры проводимостей учитываются в весе контура в качестве множителей. Для образования активного сечения требуется удалить сопротивления и проводимости, участвующие в этом сечении. При этом в качестве сомножителей в весе сечения учитываются параметры сопротивлений.

Наложение воздействий активных контуров и сечений. Введение понятий активных контуров и сечений позволяет сформулировать принцип наложения в виде

$$X = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k a_k}{\Delta} A_k, \quad (4.9)$$

где X – искомый отклик напряжения или тока; Δ – определитель схемы, A_k – вес k -го активного контура или сечения (сумма эдс контура или сумма токов источников сечения); a_k – вес элементов, требующих исключения для образования k -го активного контура или сечения; Δ_k – определитель схемы, полученной в результате замыкания контура или размыкания сечения.

Как показывают рассмотренные выше примеры, сложность выражений, сформированных на основе наложения активных контуров и сечений, не столь существенно уступает выражениям, полученным при произвольном порядке выделения параметров независимых источников. Обсуждаемая форма НПН выгодно отличается как от ЯПН, так и НПН без выделения параметров активных контуров и сечений. Веса активных контуров или сечений A_k находятся выделением параметров многомерных источников напряжения или тока, которые управляются нуллатором, помещенным вместо интересующего отклика.

4.7. РЕКОНСТРУКЦИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО МЕТОДА КИРХГОФА

Сейчас трудно сказать был ли Кирхгоф доволен своими доказательствами топологических правил. Приоритетную статью Кирхгофа характеризуют как весьма запутанную и сложную для понимания [21]. Кирхгоф предложил использовать активные контура для нахождения числителя в самом конце статьи, поэтому правило 5 до сих пор обойдено вниманием исследователей [2, 73, 74].

Кирхгоф первым пришел к неявному принципу наложения, при котором для нахождения парциального вклада оставляется в схеме не один источник (остальные нейтрализуются), а столько источников, сколько входит в активный контур. При этом влияние оставшихся источников нейтрализуется не искусственно (принудительно), а естественно, поскольку активный контур является «сверхпроводящим», и поэтому не зависит от элементов схемы, не входящих в него.

Для создания активного контура необходимо придать его сопротивлениям значения, равные нулю, или установить бесконечно большие значения его

проводимостям. Это можно интерпретировать с точки зрения закона Ома: ток равняется сумме эдс, деленной на сопротивление или ток равняется сумме эдс, умноженной на проводимость. Логично, что вес контура при сумме эдс в первом случае не имеет множителя, а во втором случае имеет множитель в виде произведения проводимостей.

Чтобы работа активного контура не нарушалась, его узлы не должны замыкаться накоротко другими ветвями схемы. Это значит, что оставшаяся часть схемы не может образовывать деревьев, поскольку в них имеются пути между каждой парой узлов. Поэтому сомножителем при весе некоторого контура является определитель схемы, полученной в результате короткого замыкания этого контура, то есть удаления его ветвей и объединения соответствующих узлов в один узел.

Число активных контуров равно числу составляющих отклика при неявном наложении источников напряжения и нахождение отклика начинается с перечисления активных контуров в схеме.

Для создания активного сечения необходимо установить его сопротивлениям бесконечно большие значения или придать значения его проводимостям, равные нулю. Это можно интерпретировать с точки зрения закона Ома: ток равняется сумме токов источников, умноженной на сопротивление, или ток равняется сумме токов источников, деленной на проводимость. Логично, что вес контура при сумме токов источников в первом случае имеет множитель в виде произведения проводимостей, а во втором случае не имеет множителя.

Чтобы работа активного сечения не нарушалась, его узлы должны замыкаться накоротко другими ветвями схемы. Это значит, что оставшаяся часть схемы должна образовывать деревья, поскольку в них имеются пути между каждой парой узлов. Поэтому сомножителем при весе некоторого сечения является определитель схемы, полученной в результате размыкания этого сечения, то есть удаления его ветвей и соединения компонент полученной несвязной схемы в одном из узлов (для получения связной схемы).

Число активных сечений равно числу составляющих отклика при неявном наложении источников тока и нахождение отклика начинается с перечисления активных сечений в схеме.

Независимость активного сечения от остальной части схемы проявляется в том, что относительно бесконечно большого внутреннего сопротивления источников тока сопротивления, соединяющие узлы сечения во внешней подсхеме имеют пренебрежимо малые значения. Следовательно, активное сечение вырождается в параллельное соединение источников тока и приемника НУИ (нуллатора), то есть не зависит от параметров других элементов схемы.

4.8. ВЫВОДЫ

С точки зрения физических основ суперпозиции явный принцип наложения представляется формальным и оторванным от реальной схемы, поскольку один из источников в действительности не может функционировать в отрыве от других источников схемы. Все источники работают совместно в рамках заданной схемы соединений, в которой пассивные элементы создают контура и сечения для прохождения тока. Таким образом, неявный принцип наложения отражает природу возникновения отклика и поэтому является более наглядным.

Множители в виде дроби при параметрах A_k в выражении (4.8) отражают вклад того или иного активного контура или сечения в искомое значение, что может быть использовано для решения задач диагностики цепи, например, для выявления существенных или несущественных активных контуров и сечений. Из преобладающих (доминирующих) слагаемых может быть сформировано упрощенное выражение, удобное для оценочных расчетов. Выражение вида (4.8), как никакое другое выражение, позволяет наглядно представить работу электрической цепи или энергетической системы, обнаружить критические контура и сечения и сформулировать требования, выполнение которых обеспечивает повышение надежности системы.

5. СИМВОЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ПРЕДЕЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

5.1. ПРЕДЕЛЬНАЯ СИМВОЛЬНАЯ СХЕМНАЯ ФУНКЦИЯ

Символьная схемная функция (ССФ) с предельными – бесконечно большими – значениями параметров элементов называется здесь предельной ССФ. Предельная ССФ может быть найдена двумя способами. Первый способ – алгебраический – заключается в нахождении математического предела ССФ общего вида, где предельные параметры представлены, как и другие, символьными идентификаторами. Второй способ – схемный – основан на анализе предельной схеме замещения, которая получается из исходной схемы путем замены сопротивления, проводимости и УИ с предельными параметрами на разрыв, идеальный проводник и нуллок соответственно [33].

Пример нахождения предельной ССФ алгебраическим способом. Требуется найти предельную передаточную функцию схемы на рис. 5.1, а, при бесконечных сопротивлении R_2 и передаточной проводимости g .

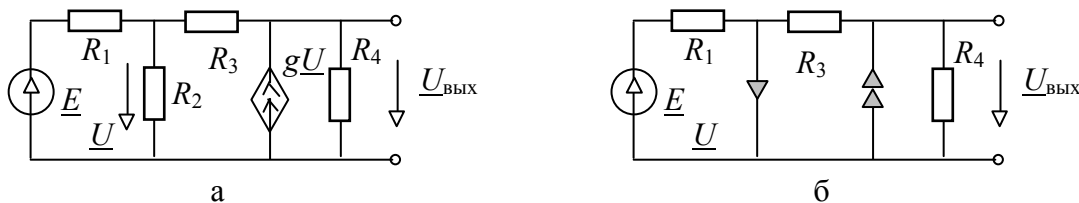


Рис. 5.1. Схема для примера построения предельной ССФ: а – исходная схема; б – предельная схема замещения при R_2 и $g \rightarrow \infty$.

Используя метод схемных определителей из раздела 2, запишем ССФ в общем виде для схемы на рис. 5.1, а

$$K = \frac{U}{E} = \frac{R_4 R_2 (g R_3 + 1)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2 (1 - g R_4)}. \quad (5.1)$$

Предел функции (5.1) имеет вид

$$K_{\text{пр}} = \lim(K, g \rightarrow \infty, R_2 \rightarrow \infty) = -\frac{R_3}{R_1}. \quad (5.2)$$

Недостатком алгебраического способа получения предельной ССФ является излишняя трудоемкость. Схемный способ более экономичен. Во-первых, предельная схема значительно проще исходной схемы, а, во-вторых, не требуется находить математический предел функции нескольких переменных.

Пример нахождения предельной ССФ с помощью предельной схемы замещения. Результат (5.2) получается с помощью предельной схемы замещения на рис. 5.1, б, которая формируется путем замены сопротивления R_2

разрывом, а УИ нулором. Предельная функция находится, как и произвольная ССФ, в виде отношения определителей схем числителя и знаменателя

$$K_{пр} = \frac{\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Circuit with } R_1, R_3, \text{ and two dependent sources (2)} \end{array} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Circuit with } R_1, R_3, \text{ and one dependent source (1)} \end{array} \\ \hline \end{array}} = -\frac{R_3}{R_1}. \quad (5.3)$$

Схемы числителя и знаменателя в (5.3) получены на основе исходной схемы на рис. 5.1, б, в которой удалено сопротивление R_4 , подключенное параллельно норатору. При формировании символического выражения (5.3) применены операции МСО – выделение сопротивления, перенумерации аномальных элементов и формула для определителя разомкнутого сопротивления.

Пример подтверждает, что предельная схема проще, чем исходная схема. Поэтому использовать ее выгоднее, чем формировать общую ССФ, а затем алгебраически находить предел функции нескольких переменных. Однако далеко не в каждом случае можно построить предельную схему замещения. Во многих случаях при построении предельной схемы замещения образуется вырожденная схема – определитель ее равен нулю.

Пример цепи с вырожденной предельной схемой замещения. Для схемы на рис. 5.2 требуется найти передаточную функцию при R_2 и $k \rightarrow \infty$. Для построения предельной схемы замещения такой цепи требуется удалить сопротивление R_2 и заменить генератор УИ норатором, в результате последний оказывается разомкнутым. Это означает, что схема вырождена и решение для нее не существует.

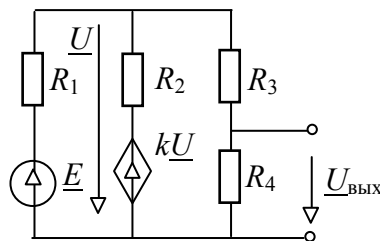


Рис. 5.2. Цепь, предельная схема замещения для которой вырождена при R_2 и $k \rightarrow \infty$

В то же время при использовании алгебраического способа предел функции может быть найден. Действительно, сформируем коэффициент передачи схемы в общем виде

$$K = \frac{U}{E} = \frac{R_4 R_2}{(R_3 + R_4)[R_1 + R_2 - kR_1] + R_1 R_2}. \quad (5.4)$$

Теперь находим предел полученной функции

$$K_{\text{np}} = \lim(K, k \rightarrow \infty, R_2 \rightarrow \infty) = \frac{R_4}{(R_3 + R_4)[1 - R_1(\sigma/p)] + R_1}, \quad (5.5)$$

где $R_1(\sigma/p)$ – переменная, численно равная соответствующему сопротивлению, но не имеющая размерности.

Таким образом, алгебраический способ позволяет найти предельные ССФ и при вырожденных предельных схемах замещения. Однако он обладает, как уже отмечалось, излишней трудоемкостью – требует формирования ССФ общего вида – для произвольных значений предельных параметров и последующего нахождения предела функции нескольких переменных.

Снижение трудоемкости получения предельных ССФ может быть достигнуто с помощью предлагаемых в настоящем разделе схемно-алгебраических формул (САФ) выделения предельных параметров элементов. САФ позволяют находить предельные схемные функции непосредственно – без промежуточных схемных функций общего вида и последующего нахождения предела функции нескольких переменных.

5.2. СХЕМНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ВЫДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ С ПРЕДЕЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Специальные схемно-алгебраические формулы (САФ) для выделения предельных параметров необходимы в случае, если предельные схемы замещения являются вырожденными. Это имеет место при последовательном и параллельном соединении определенных элементов (табл. 5.1). САФ требуются, если определенные элементы образуют сечения и контуры (табл. 5.2). Эти формулы применяются при любом количестве указанных в них элементов. Во фрагментах, приведенных в табл. 5.1 и 5.2, предельные схемы замещения элементов образуют в совокупности несвязную схему (например, схема в строке табл. 5.1), контур из нораторов (нуллаторов) или другую вырожденную схему.

Таблица 5.1

САФ для выделения групп последовательных и параллельных соединений элементов с предельными параметрами

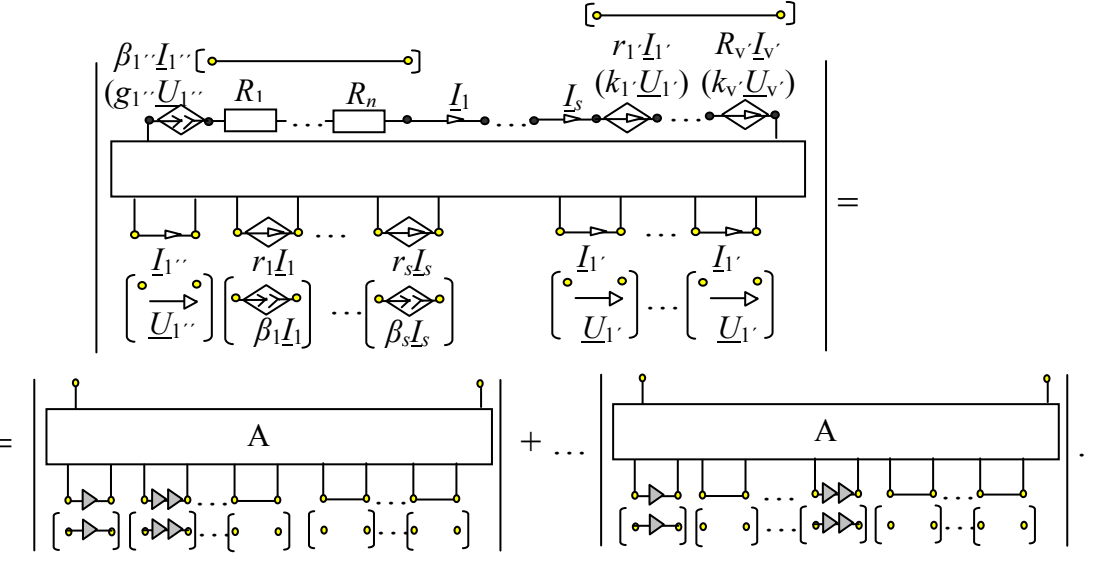
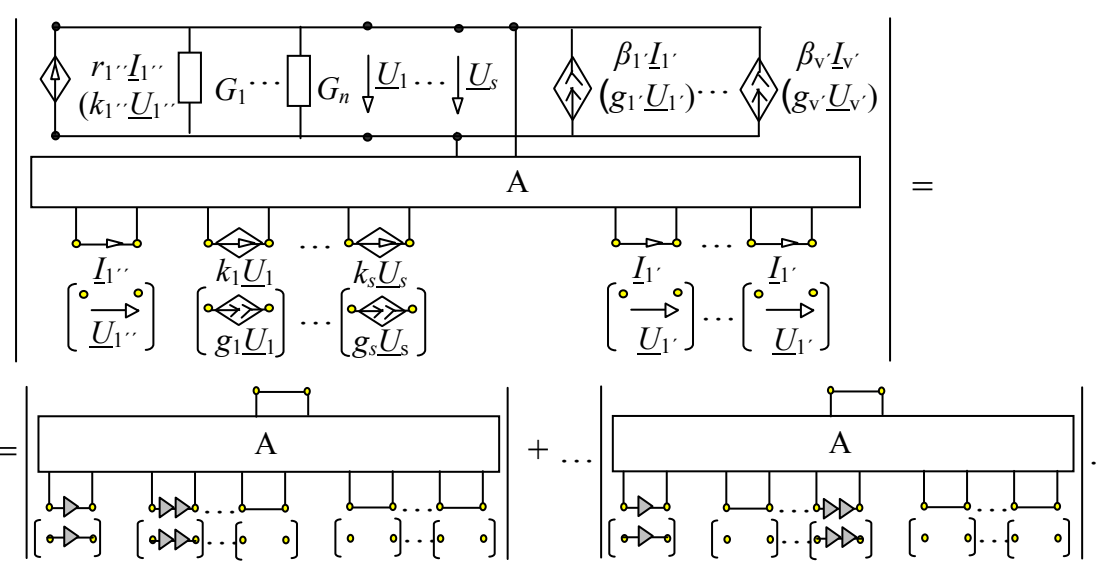
№	Группа элементов с предельными параметрами
	САФ выделения группы элементов
1	2
1	Последовательное соединение сопротивлений

1	2
2	<p style="text-align: center;">Последовательное соединение сопротивлений и генераторов напряжения УИ</p>
3	<p style="text-align: center;">Параллельное соединение проводимостей</p>

1	2
4	Параллельное соединение проводимостей и генераторов УИ тока
	<p>The diagram illustrates the parallel connection of conductivities and current sources. At the top, a network of conductivities G_1, G_2, \dots, G_n and current sources $g_1 U_1, g_2 U_2, \dots, g_s U_s, \beta_1 I_1, \beta_2 I_2, \dots, \beta_v I_v$ is shown. Below this, a series of blocks labeled 'A' represent parallel branches. The first block is followed by a series of voltage sources U_1, U_2, \dots, U_s and current sources I_1, I_2, \dots, I_v. The diagram is annotated with '+n', '+', '+', '+', '+', '+', '+', '+', and a period '.'.</p>

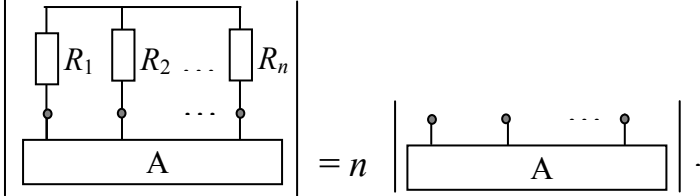
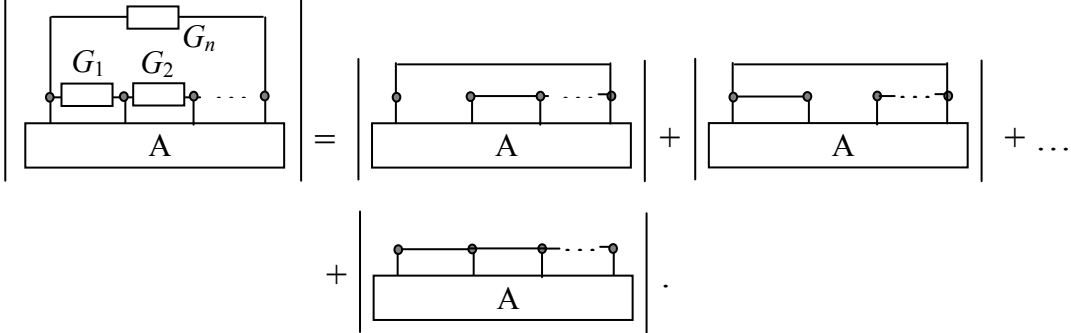
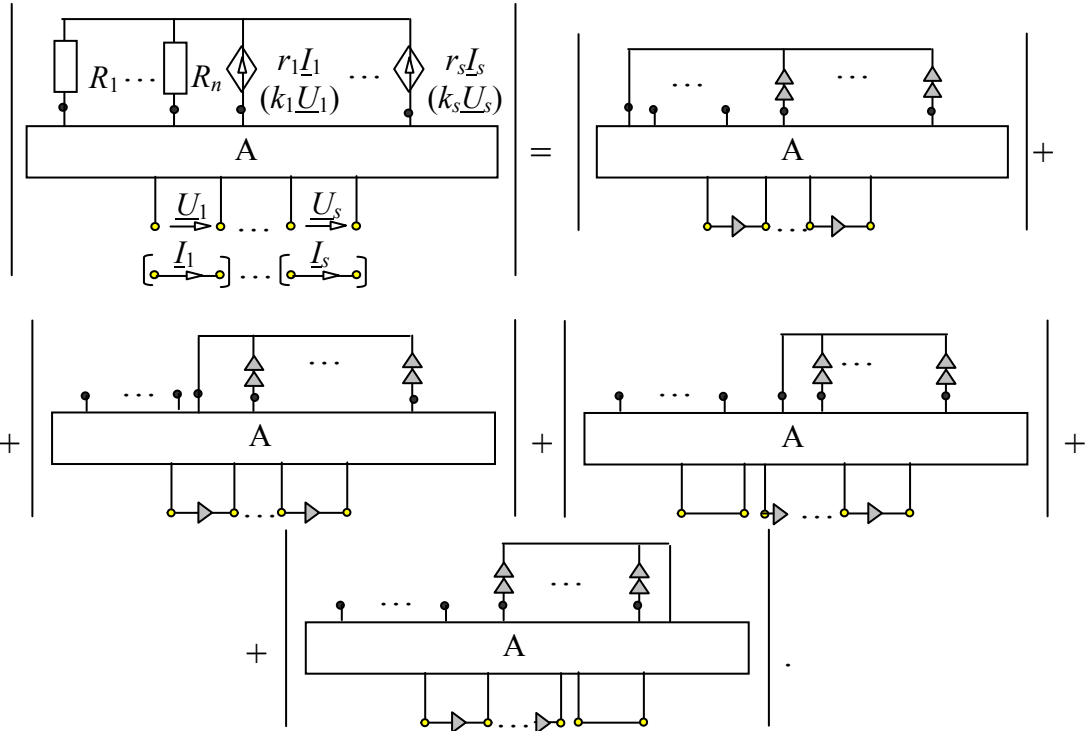
1	2
5	<p style="text-align: center;">Последовательное соединение сопротивлений и приемников тока УИ</p> <p>The diagram illustrates the decomposition of a circuit with series resistors and current sources into a sum of circuits with current sources and conductance sources. The top part shows a circuit with resistors R_1, R_2, \dots, R_n and current sources I_1, I_2, \dots, I_s connected in series. This is shown to be equivalent to a sum of n circuits, each containing a current source $r_i I_i$ and a conductance source $\beta_i I_i$ in parallel, connected to a block A.</p>
6	<p style="text-align: center;">Параллельное соединение проводимостей и приемников напряжения</p> <p>The diagram illustrates the decomposition of a circuit with parallel conductances and voltage sources into a sum of circuits with voltage sources and conductance sources. The top part shows a circuit with conductances G_1, G_2, \dots, G_n and voltage sources U_1, U_2, \dots, U_s connected in parallel. This is shown to be equivalent to a sum of n circuits, each containing a voltage source $k_i U_i$ and a conductance source $g_i U_i$ in parallel, connected to a block A.</p>

1	2
7	<p style="text-align: center;">Последовательное соединение сопротивлений, генераторов напряжения и приемников тока УИ</p> <p style="text-align: center;">Параллельное соединение проводимостей, приемников напряжения и генераторов тока УИ</p>
8	<p style="text-align: center;">Параллельное соединение проводимостей, приемников напряжения и генераторов тока УИ</p>

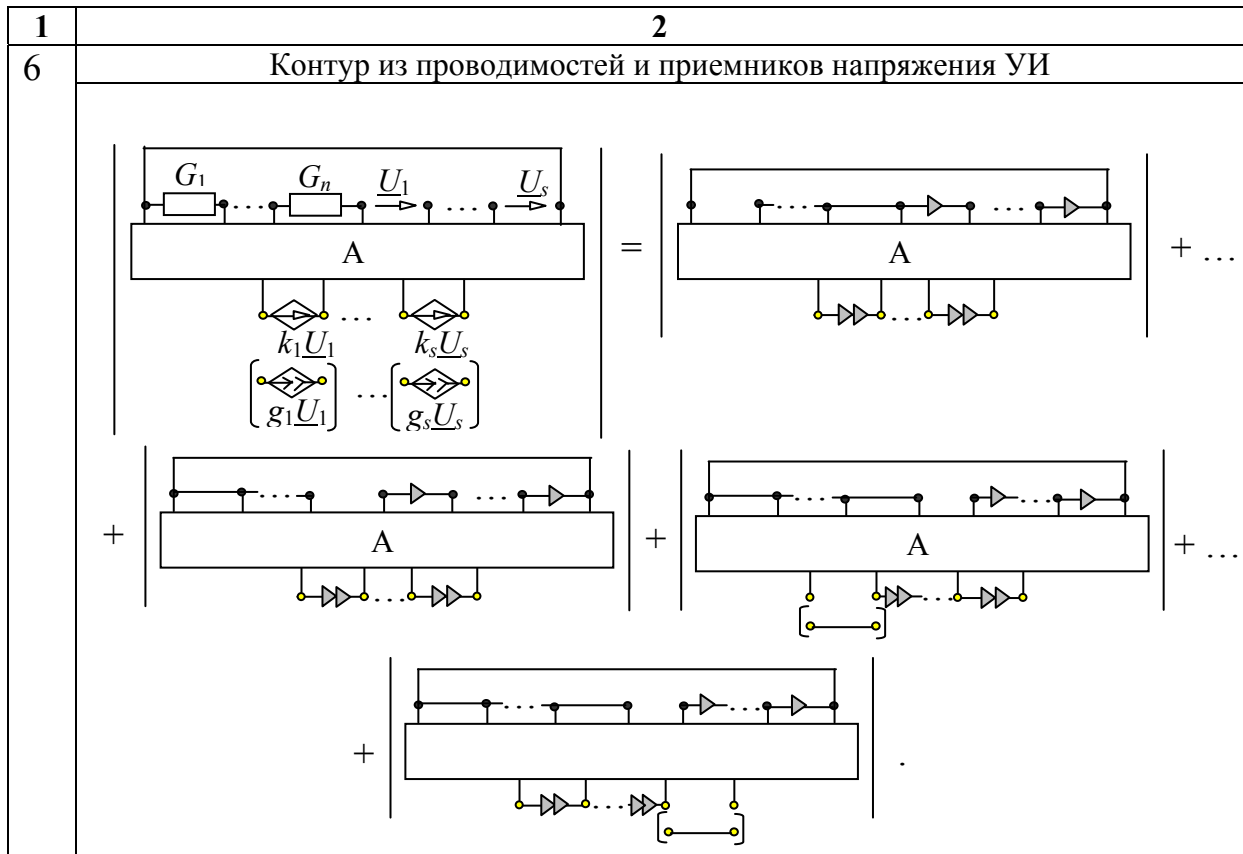
1	2
9	<p data-bbox="276 293 1385 360">Последовательное соединение генератора тока УИ, сопротивлений, генераторов напряжения и приемников тока УИ</p>  <p>The diagram illustrates the decomposition of a series circuit into a sum of sub-circuits. The top part shows a series connection of a current source $\beta_1 I_1'$, resistors R_1, \dots, R_n, current I_1, a current source I_s, and voltage sources $k_1 U_1', \dots, k_v U_v'$. This is shown to be equivalent to a sum of sub-circuits, each containing a block 'A' and a current source I_1'.</p>
10	<p data-bbox="276 965 1385 1032">Параллельное соединение генератора напряжения УИ, проводимостей, приемников напряжения и генераторов тока УИ</p>  <p>The diagram illustrates the decomposition of a parallel circuit into a sum of sub-circuits. The top part shows a parallel connection of a voltage source $r_1 I_1'$, conductances G_1, \dots, G_n, voltage U_1, \dots, U_s, and current sources $\beta_1 I_1', \dots, \beta_v I_v'$. This is shown to be equivalent to a sum of sub-circuits, each containing a block 'A' and a voltage source U_1'.</p>

Доказательство САФ. Доказательство основано на использовании понятия определителя автономной подсхемы [35], что позволяет вывести единую формулу выделения групп элементов с предельными параметрами, справедливую как для числителя, так и для знаменателя. Формулы получаются путем последовательного выделения всех параметров рассматриваемой группы элементов. В результирующую формулу войдут в соответствии с правилом нахождения математического предела рациональных функций только те слагаемые, которые содержат максимальное число предельных параметров.

САФ для выделения групп элементов (с предельными параметрами),
составляющих сечения и контура

№	Группа элементов с предельными параметрами САФ выделения группы элементов
1	2
1	<p>Сечение из сопротивлений</p> 
2	<p>Контур из проводимостей</p> 
3	<p>Сечение из сопротивлений и генераторов напряжения УИ</p> 

1	2
4	<p style="text-align: center;">Контур из проводимостей и генераторов тока УИ</p> <p>The diagram illustrates the decomposition of a circuit with conductances G_1, \dots, G_n and current sources $g_1 U_1$ and $g_s U_s$ into a sum of simpler circuits. The conductance network is labeled A. The current sources are represented as $(\beta_1 I_1)$ and $(\beta_s I_s)$. The decomposition is shown as a sum of three circuits, each with the conductance network A and the current sources placed at different nodes.</p>
5	<p style="text-align: center;">Сечение из сопротивлений и приемников тока УИ</p> <p>The diagram illustrates the decomposition of a circuit with resistors R_1, \dots, R_n and current sinks I_1, \dots, I_s into a sum of simpler circuits. The resistor network is labeled A. The current sinks are represented as $r_1 I_1$ and $r_s I_s$. The decomposition is shown as a sum of three circuits, each with the resistor network A and the current sinks placed at different nodes.</p>



5.3. ПРИМЕРЫ НАХОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ САФ

Нахождение ССФ для схемы с последовательным соединением сопротивления и генератора ИНУН с предельными параметрами. Рассмотрим пример предельного анализа из подраздела 5.1. Для схемы на рис. 5.1,а нельзя построить предельную схему замещения при k и $R_2 \rightarrow \infty$, поэтому для формирования предельной передаточной функции применим формулу выделения последовательного соединения ИНУН и резистора (строка 2 в табл. 5.1). Запишем исходное схемно-алгебраическое выражение знаменателя и выделим в нем сумму сопротивлений R_3 и R_4

$$D = \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} U \\ R_1 \\ R_2 \\ kU \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \end{array} \right| = (R_3 + R_4) \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} U \\ R_1 \\ R_2 \\ E \\ kU \end{array} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} U \\ R_1 \\ R_2 \\ kU \end{array} \end{array} \right| \quad (5.6)$$

К каждому слагаемому (5.6) применим упомянутую выше формулу выделения предельных параметров R_2 и k , затем исключая вырожденные слагаемые, получим

$$D = (R_3 + \left[\left| \begin{array}{c} \boxed{R} \\ \hline \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \boxed{R \nabla \blacktriangle} \\ \hline \end{array} \right| \right] + \left| \begin{array}{c} \boxed{R_1} \\ \hline \end{array} \right| = (R_3 + R_4)(1 - R_1(\delta/p)) + R_1. \quad (5.7)$$

Формула для знаменателя (5.7) совпадает с соответствующим выражением из (5.5). В то же время (5.7) получено без предварительного формирования общей формулы и выполнения последующего предельного перехода. Аналогично получается предельная формула для числителя, при этом схема числителя формируется как обычно – с использованием нуллора.

Нахождение предельной функции для схемы с последовательным соединением генераторов ИНУН, имеющих предельные параметры. Рассмотрим схему на рис. 5.3 [16], необходимо найти передаточную функцию схемы от входа к нагрузке при предельных значениях параметров обоих УИ.

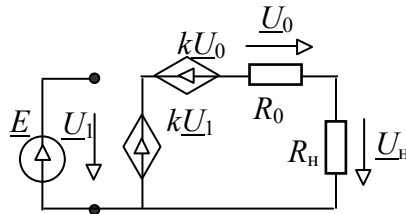


Рис. 5.3. Схема, моделирующая источник тока с помощью последовательного соединения генераторов ИНУН

Схема знаменателя передаточной функции будет содержать только один УИ, поскольку второй оказывается нейтрализованным вместе с независимым источником. В результате для полученной схемы может быть построена предельная схема замещения, и знаменатель искомой функции имеет вид

$$D = \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} \boxed{kU_0} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} \boxed{R_0} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} \boxed{R_n} \\ \hline \end{array} \end{array} \right|_{k \rightarrow \infty} = \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} \boxed{R_0} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} \boxed{R_n} \\ \hline \end{array} \end{array} \right| = R_0.$$

Для числителя предельная схема является вырожденной. Поэтому необходимо использовать САФ выделения группы последовательно соединенных генераторов напряжения УИ с предельными параметрами из строки 2 табл. 5.1. Из двух слагаемых, которые следуют из САФ, ненулевым будет только одно

5.4. АЛГОРИТМ РАЗЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ СХЕМЫ С ПРЕДЕЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Применение САФ позволяет аналитически получить предельную ССФ в случае вырождения предельной схемы замещения. Однако при реализации этого подхода возникает необходимость хранения большого числа САФ. Более экономичным является предлагаемый ниже алгоритм первоочередного выделения предельных параметров по общим формулам, который позволяет получить предельную ССФ без САФ.

Алгоритм содержит следующие этапы.

А. Определяется максимальная степень бесконечной величины, которая имеет место при выделении предельных параметров из автономной схемы.

Б. В автономной схеме находится коэффициент перед бесконечностью максимальной степени в виде схемно-алгебраического выражения.

В. Формируется знаменатель предельной функции путем раскрытия определителя одноименной схемы, полученной путем нейтрализации независимого источника и приемника отклика из схемно-алгебраического выражения в п. Б.

Г. Формируется числитель предельной функции путем раскрытия определителя одноименной схемы, полученной путем замены на норатор и нуллятор независимого источника и приемника отклика из схемно-алгебраического выражения в п. Б.

Д. Сформированные символьные выражения числителя и знаменателя составляют искомую предельную функцию. В случае, если числитель или знаменатель оказывается равным нулю, то искомая функция равна нулю или бесконечности соответственно.

Этот алгоритм подобен алгоритму нахождения полиномиальных коэффициентов, где формируются коэффициенты перед степенями оператора p в числителе и знаменателе схемной функции [36]. Здесь находится коэффициент перед максимальной степенью бесконечности, причем в виде схемно-алгебраического выражения.

Максимальная степень бесконечности определяется по формуле

$$n_{\max} = n_{np} - n_{выр},$$

где n_{np} и $n_{выр}$ – число предельных параметров и число вырожденных сечений и контуров из элементов с предельными параметрами. Вырожденность контуров или сечений определяется по предельной схеме замещения.

Схемно-алгебраическое выражение перед максимальной степенью бесконечности находится путем первоочередного рекурсивного выделения предельных параметров. При этом степень бесконечности отсчитывается с помощью показателя степени скобок, а предельным параметрам присваивается значение, равное 1. Выражение в скобках с показателем ниже максимального стирается, если оно не содержит элементов с предельными параметрами.

5.5. ВЫВОДЫ

Предложенные схемно-алгебраические формулы (САФ) для выделения предельных (бесконечно больших) параметров позволяют сформировать предельные символьные схемные функции (ССФ) в случае вырождения предельных схем замещения. Применение САФ существенно экономичнее алгебраического способа нахождения предельных функций, поскольку они не требуют трудоемкого формирования ССФ для схемы общего вида и последующего нахождения математического предела функции нескольких переменных. Изложенный алгоритм не требует хранения САФ и позволяет сформировать предельные ССФ, используя только формулы выделения общего вида.

6. МИНИМИЗАЦИЯ ИЗБЫТОЧНОСТИ В УРАВНЕНИЯХ КИРХГОФА

Обратим внимание на то, что не всегда имеются избыточные слагаемые в определителях гибридных матриц, построенных по законам Кирхгофа и содержащих как сопротивления, так и проводимости. Не будет избыточных слагаемых, если выбрать дерево для системы контуров и сечений, ветви которого содержат проводимости, а хорды – сопротивления. Полученная на основе такого дерева матрица не содержит повторяющихся параметров и, следовательно, избыточных слагаемых. Недостатком такого подхода является требование свободного выбора типа ветви – сопротивления или проводимости. В то же время и однородные методы токов и напряжений также не всегда сопровождаются образованием избыточных слагаемых.

6.1. ФОРМИРОВАНИЕ БЕЗЫЗБЫТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ Z- И Y-СХЕМ

Учитывая многообразие систем уравнений по числу деревьев, можно предположить, что их символьные определители содержат различное количество избыточных слагаемых. Оказывается, если использовать не одно, как обычно [82], а пару разных деревьев, причем одно – для построения уравнений баланса токов, а второе – для уравнений напряжений, то можно выбрать такую пару деревьев, которая обеспечит безызбыточный символьный определитель. При этом каждое дерево из этой пары должно удовлетворять определенным условиям (табл. 6.1).

Доказательство условий выбора деревьев для z-схем. Сопротивления ветвей дерева, в отличие от сопротивлений дополнения, входят в матрицу Кирхгофа несколько раз и поэтому способны образовать в разложении ее определителя наряду с действительными слагаемыми взаимно уничтожающиеся слагаемые. Выполнение условия 1 из табл. 6.1 для ветвей дерева (пример на рис. 2.1), образующего систему контуров, исключает возможность образования из сопротивлений этих ветвей действительных слагаемых. Произведение этих сопротивлений не может быть слагаемым определителя, поскольку они не могут быть дополнением. В то же время это произведение может войти в разложение матрицы четное число раз в виде избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых. Чтобы исключить и это, следует выполнить условие 2 (табл. 6.1) выбора базисного дерева для системы сечений.

Условия выбора деревьев при построении безызбыточных уравнений Кирхгофа

Тип схемы	Дерево для контуров	Дерево для сечений
Z	1. Все (или все, кроме одной) ветви дерева, сопротивления которых повторяются в матрице, должны входить в одно сечение исходной схемы.	2. Дерево должно быть максимально удаленным от дерева, на котором построена система контуров.
Y	3. Дерево должно быть максимально удаленным от дерева, на котором построена система сечений.	4. Все (или все, кроме одной) ветви дополнения дерева, проводимости которых повторяются в матрице, должны входить в один контур.

Это дерево (пример на рис. 6.1) должно быть максимально удалено от дерева, на котором построена система контуров, чтобы токи ветвей дерева для системы контуров вошли в одно уравнение баланса. Это обеспечивает появление нулевой строки в алгебраическом дополнении к минору, содержащему строки с параметрами элементов и столбцы, соответствующие ветвям дерева. Тогда при произвольном разложении матрицы любое сочетание сопротивлений ветвей дерева умножается на ноль, что не позволяет появляться избыточным слагаемым. Таким образом, совместное выполнение условий 1 и 2 построения пары деревьев для z -схемы, во-первых, исключает возможность формирования из сопротивлений деревьев действительных слагаемых определителя и допускает только пары взаимно уничтожающихся слагаемых, а во-вторых, исключает появление и этих слагаемых.

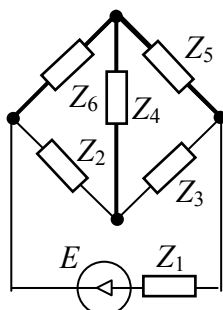


Рис. 6.1. Схема Кирхгофа: дерево, максимально удаленное от дерева на рис. 2.1, выделено жирной линией

Доказательство условий выбора деревьев для y -схем. Определитель системы уравнений y -схемы не будет содержать избыточных слагаемых, если

при выборе базисных деревьев выполняются дуальные условия 3 и 4 (табл. 6.1). Если выбор дерева для сечений удовлетворяет условию 4, то произведение проводимостей ветвей дополнения этого дерева не может быть слагаемым определителя, поскольку эти ветви не могут образовать ни одно из деревьев. Проводимости ветвей дополнения образуют только избыточные слагаемые в разложении определителя матрицы.

Чтобы исключить эти слагаемые, дерево для контуров должно быть наиболее удаленным от дерева, на котором построена система сечений. При этом напряжения ветвей дополнения войдут в одно уравнение баланса, что обеспечит появление нулевой строки в алгебраическом дополнении, соответствующем максимальному минору с проводимостями ветвей. В этом случае при разложении матрицы любое произведение проводимостей ветвей дополнения, умножается на ноль, что не позволяет появляться избыточным слагаемым. Таким образом, совместное выполнение условий 4 и 3 построения пары деревьев для u -схемы, во-первых, исключает возможность формирования из проводимостей дополнений деревьев действительных слагаемых определителя и допускает только пары взаимно уничтожающихся слагаемых, а во-вторых, исключает появление и этих избыточных слагаемых.

Пример построения уравнений для z -схемы на основе пары деревьев, удовлетворяющих условиям 1 и 2. Такая пара деревьев приведена на рис. 2.1 и 6.1. Первое из них применяется для составления баланса напряжений, а второе – для составления баланса токов. Построенная на их основе матрица имеет вид

	1	2	3	4	5	6
1	Z_1	$-Z_2$	Z_3			
2			Z_3	$-Z_4$	Z_5	
3		Z_2		$-Z_4$		Z_6
4	1	1				-1
5		1	1	1		
6	-1		1		-1	

(6.1)

При раскрытии определителя матрицы (6.1) по столбцу 6, имеющему минимальное число ненулевых элементов – два, получается

$$\Delta = -Z_6 \{Z_5[Z_1 + Z_2 + Z_3] + Z_1[Z_3 + Z_4] + [Z_2(Z_3 + Z_4) + Z_3Z_4]\} - \{Z_5[Z_1(Z_2 + Z_4) + Z_3(Z_2 + Z_4) + Z_2Z_4] + Z_1[Z_3(Z_2 + Z_4) + Z_2Z_4]\}. \quad (6.2)$$

Выражение определителя (6.2) в отличие от формулы (2.2) более компактно и в нем отсутствуют избыточные слагаемые.

Пример построения уравнений для u -схемы на основе пары деревьев, удовлетворяющих условиям 3 и 4. В схеме на рис. 6.2, а показано такое дерево, что все, кроме одной, ветви его дополнения образуют контур. Это дерево удовлетворяет условию 4 из табл. 6.1 для системы сечений. Дерево для

системы контуров, максимально удаленное в соответствии с условием 3 из табл. 6.1 от дерева для системы сечений, показано на рис. 6.2, б. Построенная с использованием указанных деревьев безызбыточная матрица имеет вид

	1	2	3	4	5	6	7
1	Y_1	Y_2				Y_6	Y_7
2	Y_1		$-Y_3$	$-Y_4$			
3		Y_2	Y_3		$-Y_5$		
4	-1	1	-1				
5	1		1		1		-1
6	1			1			-1
7						1	-1

(6.3)



Рис. 6.2. Y-схема для построения безызбыточной матрицы: деревья для системы сечений (а) и контуров (б) отмечены жирной линией

При раскрытии определителя матрицы (6.3) любым известным способом избыточные слагаемые не появляются. При использовании для построения системы уравнений деревьев (дерева), не удовлетворяющих условиям 4 и 3, появляются избыточные слагаемые.

6.2. МИНИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА ИЗБЫТОЧНЫХ СЛАГАЕМЫХ В ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ Z-СХЕМЫ

Условие 1 (табл. 6.1) выбора дерева для системы контуров z-схемы выполняется только в случае, если все или все, кроме одной, ветви схемы соединены с базисным узлом. Это полные, усеченные полные схемы, а также лестничные цепи. Условие 4 (табл. 6.1) выбора дерева для системы сечений u-схемы выполняется также только в частных случаях.

При невозможности выполнить условие 1, то есть при отсутствии дерева, ветви которого образуют сечение в исходной цепи, например, при наличии нескольких параллельных ветвей, следует выбрать дерево, максимально приближенное к искомому дереву, то есть дерево, наибольшее число ветвей которого входит в одно из сечений исходной цепи. Такое дерево для системы контуров и наиболее удаленное от него дерево для системы сечений, которое

всегда существует, обеспечивают минимизированное число избыточных слагаемых, поскольку ветви дерева, составляющие сечение, не будут образовывать взаимно уничтожающиеся слагаемые. Однако сопротивления других ветвей дерева могут образовывать избыточные слагаемые.

Алгоритм построения системы уравнений с минимизированной избыточностью для z-схемы.

1. Поиск сечения, содержащего максимальное число ветвей в соответствии с условием 1 в табл. 6.1.

2. Выбор дерева, содержащего все ветви максимального сечения из п. 1. К остальным ветвям дерева особых требований не предъявляется.

3. Формирование базисного дерева для системы сечений, то есть дерева, максимально удаленного от дерева для системы контуров в п. 2 в соответствии с условием 2 из табл. 6.1.

4. Нахождение контуров и сечений на основе деревьев из п. 2 и 3.

5. Построение уравнений баланса напряжений и токов на основе систем контуров и сечений из п. 4.

Для реализации приведенного алгоритма следует использовать специальные эффективные методы нахождения экстремальных сечений и деревьев, которые разработаны в теории графов [15]. Алгоритм построения системы уравнений для y-схемы с минимизированной избыточностью дуален изложенному выше алгоритму для z-схем и использует условия 3 и 4 из табл. 6.1.

6.3. МИНИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА ИЗБЫТОЧНЫХ СЛАГАЕМЫХ В ОПРЕДЕЛИТЕЛЯХ Y-СХЕМ

Условие 4 (табл. 6.1) выбора дерева для системы сечений y-схемы выполняется только в частных случаях. При невозможности выполнить это условие, то есть при отсутствии дерева, дополнение которого образует сечение в исходной цепи, следует выбрать дерево, максимально приближенное к искомому дереву, то есть дерево, наибольшее число ветвей которого входит в один из контуров исходной цепи. Такое дерево для системы сечений и наиболее удаленное от него дерево для системы контуров, которое всегда существует, обеспечивают минимизированное число избыточных слагаемых, поскольку ветви, составляющие контур, не будут образовывать взаимно уничтожающиеся слагаемые. Однако сопротивления других ветвей дополнения могут образовывать избыточные слагаемые.

Алгоритм построения системы уравнений с минимизированной избыточностью для y-схемы.

1. Поиск контура, содержащего максимальное число ветвей в соответствии с условием 4 в табл. 6.1.

2. Выбор дерева для системы сечений, не содержащего максимального числа ветвей из контура в п. 1.

3. Формирование базисного дерева для системы контуров, то есть дерева, максимально удаленного от дерева для системы сечений в п. 2 в соответствии с условием 3 из табл. 6.1.

4. Нахождение контуров и сечений на основе деревьев из п. 2 и 3.

5. Построение уравнений баланса напряжений и токов на основе систем контуров и сечений из п. 4.

Алгоритм построения системы уравнений для y -схемы с минимизированной избыточностью дуален изложенному выше алгоритму для z -схем в подразделе 6.2.

6.4. ИСКЛЮЧЕНИЕ ИЗБЫТОЧНЫХ СЛАГАЕМЫХ ПУТЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО СТРОКАМ С ПАРАМЕТРАМИ ЭЛЕМЕНТОВ

Поскольку в общем случае исключить избыточные слагаемые при разложении матричных определителей невозможно, необходим экономичный алгоритм их локализации и удаления. Для этого предлагается разлагать определитель не по строке или столбцу, как это обычно принято, а по совокупности строк [40], причем строк с параметрами – сопротивлениями и проводимостями для z - и y -схем соответственно. Так как одинаковые параметры находятся в столбцах, то совпадающие по модулю пары слагаемых локализируются в одном миноре. В результате, существенно сокращается число операций по поиску и удалению этих слагаемых.

Алгоритм локализации и поиска избыточных слагаемых

1. Вычислить количество исследуемых миноров по формуле $N_M = C_p^n$, где C_p^n – число сочетаний из p по n столбцов; p – число ветвей; n – число независимых контуров и сечений для уравнений по методу токов и напряжений соответственно.

2. Принять номер минора $i = 1$.

3. Разложить минор с номером i по слагаемым.

4. Найти равные по модулю слагаемые путем пересечения множеств номеров сопротивлений, входящих в слагаемые, и исключить их.

5. $i = i + 1$.

6. Если $i < N_M$, то перейти к п. 3, иначе исключение избыточных слагаемых закончено.

Алгоритм позволяет существенно сократить число теоретико-множественных операций, поскольку поиск равных по модулю слагаемых и их исключение осуществляется отдельно в каждом миноре, а не во всем определителе. Далее предложенный алгоритм по разложению определителей Кирхгофа сравнивается с традиционным алгоритмом как на примере схемы

Кирхгофа, так и других схем этого класса, взятых для удобства количественного сравнения.

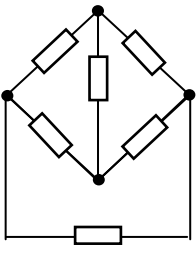
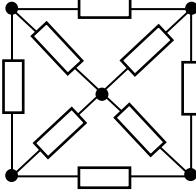
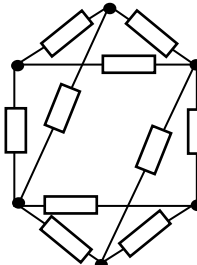
Пример удаления избыточных слагаемых из определителя схемы Кирхгофа. Для матрицы (6.3) разложение определителя осуществляется по строкам 1–3, содержащим сопротивления элементов. При этом повторяющиеся параметры, которые потенциально могут создавать избыточные слагаемые, находятся в столбцах 2, 3 и 4 – это сопротивления ветвей дерева Z_2 , Z_3 и Z_4 (рис. 2.1). Минор третьего порядка, составленный из этих столбцов и указанных строк, содержит пару слагаемых $\pm Z_2 Z_3 Z_4$. Эти слагаемые порождают в результирующем выражении определителя избыточные слагаемые, поскольку будут умножены на одно и то же алгебраическое дополнение. Для их исключения требуется всего одну операцию пересечения двух множеств из трех десятичных цифр. Все остальные миноры включают по одному слагаемому и, следовательно, не содержат избыточных слагаемых.

6.5. АНАЛИЗ СХЕМ С РАВНЫМ ЧИСЛОМ НЕЗАВИСИМЫХ СЕЧЕНИЙ И КОНТУРОВ

Для таких схем число уравнений баланса токов равно числу уравнений баланса напряжений. В табл. 6.2 приводятся сведения для трех таких схем с числом узлов $q = 4, 5, 6$. Схема с четырьмя узлами является схемой Кирхгофа (рис. 2.1).

Общее число слагаемых S и число действительных слагаемых S_d в определителе этих схем найдено путем построения уравнений Кирхгофа и раскрытия соответствующего определителя. Число операций поиска и исключения избыточных слагаемых в определителе в целом находится путем пересечения множеств номеров соответствующих ветвей по формуле $N_o = C_S^2$, где S – число всех слагаемых в разложении определителя, в том числе избыточных. Число операций пересечения множеств при поиске избыточных слагаемых в минорах N_m найдено путем непосредственного их раскрытия. Таких операций многократно меньше, чем аналогичных операций N_o при поиске избыточных слагаемых в определителе в целом. При этом выигрыш предложенного алгоритма увеличивается по мере возрастания сложности анализируемой цепи.

Разложение определителей Кирхгофа для z-схем с равным числом независимых сечений и контуров

№ схемы	1	2	3
Число узлов, q	4	5	6
Число ветвей, $p = 2q - 2$	6	8	10
Схема			
Действительных слагаемых в определителе, S_d	16	45	126
Всего слагаемых в определителе, S	20	49	158
Избыточных слагаемых, $S - S_d$	4	4	32
Операций исключения избыточных слагаемых из определителя, N_o	190	1176	12 090
Операций исключения слагаемых в минорах, N_m	1	2	16

6.6. ВЫВОДЫ

Показано, что избыточные слагаемые в матричных определителях Кирхгофа порождаются при наличии одинаковых параметров в столбцах матрицы. Сформулированы правила формирования системы уравнений Кирхгофа, позволяющие исключить или минимизировать образование избыточных слагаемых при использовании любого способа раскрытия матричных определителей.

Для исключения взаимно уничтожающихся слагаемых предложено раскрывать определители Кирхгофа по совокупности строк, содержащим параметры элементов. При этом избыточные слагаемые локализуются внутри определенных миноров, и для их удаления требуется существенно меньше операций пересечения множеств.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обсуждение проблемы избыточности в теории электрических цепей, поставленной Кирхгофом в середине 19-го века, было сопровождено историческим экскурсом. В настоящее время многие задачи этой проблемы нашли свое решение, в том числе и в настоящей монографии. Здесь впервые исследована взаимосвязь между классическими топологическими правилами Кирхгофа и Максвелла, формулами Фойснера и основами метода схемных определителей.

Получил развитие метод схемных определителей, реализованный в эффективных компьютерных программах, который позволяет избежать возникновения взаимно уничтожающихся слагаемых в выражениях схемных функций и откликов, которые формируются непосредственно на основе схемы замещения.

Представлены новые топологические правила и формулы для разложения схемного определителя по активным контурам и сечениям при одновременном учете произвольного числа воздействий. Наложение воздействий активных контуров и сечений отражает физическую сторону процессов, происходящих в электрической цепи, и может быть использовано при решении задач диагностики электрических сетей.

В монографии исследованы вопросы минимизации избыточности в уравнениях, составленных по законам Кирхгофа, и локализации (с последующим исключением) избыточных подвыражений при получении аналитических решений на основе разложения определителя матрицы по совокупности строк.

Нашла освещение и другая сторона проблемы избыточности – необходимость учета бесконечно больших значений параметров перед проведением вычислений. В рамках метода схемных определителей разработаны специальные формулы выделения предельных параметров, удобные как для реализации в виде компьютерных программ, так и при использовании в качестве инженерных методик.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгебра компьютерная, 6, 110
- Анализ
электрических цепей, 17, 83
символьный, 6, 29, 83
- АЧХ, 150
- Выделение параметра**, 31
- Выражение
схемно-алгебраическое (САВ), 41, 58
- Вырождение схемы 17, 31
- Генератор**
напряжения, 42, 44
НУИ, 43, 44
- Граф**
гибридный, 12
унисторный, 12
сигнальный, 12
- Дерево**, 55, 98
максимально удаленное, 99, 101
- Законы Кирхгофа**, 22
- Избыточность**, 102, 103
- Исключение**, 104, 107
- Источник**
управляемый (УИ), 35, 36
ИНУН, 40, 42
ИНУТ, 42, 44
ИТУН, 44, 45
ИТУТ, 45, 48
- Калькулятор**, 13
- Контур**, 18, 22
- Коэффициент полинома**, 67
- Матрица**, 8, 10
- Метод**
контурных токов, 11, 18
напряжений ветвей, 20
неявный, 23, 72
нуллорных схем, 15
схемных определителей, 73, 83
токов ветвей, 18, 19
узловых напряжений, 11, 14
явный, 82
d-деревьев, 16
- Минимизация**, 68, 98
- Минор**, 101
- Модель**, 22
промежуточная, 11, 13
- Нейтрализация элементов**, 17, 31
- Неудаляемый управляемый источник**, 36, 43
- Нуллор**, 45, 46
- Операционный усилитель (ОУ)**, 54
- Определитель**
схемы 16, 24
схемы знаменателя, 16
короткого замыкания, 73, 76
- Отклик**, 79, 80
- Подход к символьному анализу**
графовый, 8
матричный, 8
схемный, 8
теоретико-множественный, 8
- Предельная ССФ**, 83
- Правило**
контуров, 73, 78
сечений, 75
- Правила топологические**
Кирхгофа, 17, 21
Максвелла, 27
- Приемник НУИ**, 43
- Программа компьютерная CIRSYM**, 46
- Разложение определителя**, 104
- Свертка**, 10
- Сечение**, 55, 56
- Сопротивление передаточное**, 95
- Схема**
Кирхгофа, 99
нуллорная, 15
- Таблица**
умножения, 13
- Точность**, 18
- Условия вырождения**, 43
- Формула**
выделения Фойснера, 33
Крамера, 34
- Функция**
символьная схемная (ССФ), 35
схемно-алгебраическая (САФ), 85
полиномиальная, 96
ФЧХ, 62

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беллерт, С. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел / С. Беллерт, Г. Вознячки. – М. : Мир, 1972. – 334 с.
2. Белов, Г. А. Применение символьных схемных функций для расчета электрических цепей / Г. А. Белов, В. Г. Захаров // *Электричество*. – 2003. – № 8. – С. 34-41.
3. SCAD – система символьного анализа и диагностики линейных электронных цепей / Р. И. Березуев, С. А. Курганов, В. В. Филаретов и др. // *Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез и анализ: Тр. международ. конф. КЛИН–2005*. – Ульяновск : УлГТУ. – 2005. – Т. 3. – С. 3-11.
4. Блажкевич, Б. И. Топологические методы анализа электрических цепей и перспективы их развития / Б. И. Блажкевич // *Отбор и передача информации*. – Киев, 1970. – Вып. 26. – С. 20-34.
5. Браун, Я. Ориентация нуллора / Я. Браун ; под ред. В. В. Филаретова // *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.* – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 299-308.
6. Васильев, Н. С. Об автоматическом построении оптимальных параллельных алгоритмов вычисления арифметических выражений / Н. С. Васильев // *Кибернетика и вычислительная техника*. – Вып. 5. – М. : Наука, 1991. – С. 243-260.
7. Филаретов, В. В. Владимир Георгиевич Миронов / В. В. Филаретов ; под ред. В. В. Филаретова // *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.* – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 335-341.
8. Волгин, Л. И. Схемно-алгебраический анализ и принципы построения аналоговых операционных преобразователей : учебное пособие / Л. И. Волгин, Ф. А. Королев, В. В. Филаретов. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – 88 с.
9. Волгин, Л. И. Схемно-алгебраический анализ и топологические преобразования моделей электронных цепей / Л. И. Волгин, Ф. А. Королев, В. В. Филаретов. – Ульяновск : УлГТУ, 2007. – 356 с.
10. Галямичев, Ю. П. Расчет активных схем при помощи деревьев схем / Ю. П. Галямичев // *Электросвязь*. – 1960. – №8. – С. 48-57.
11. Горшков, К. С. Символьные и матрично-численные методы моделирования электронных цепей: противостояние и взаимодополнение / К. С. Горшков // *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Тр. международ. конф. КЛИН–2007*. – Ульяновск : УлГТУ, 2007. – Т. 3. – С. 234-245.
12. Горшков, К. С. Анализ и синтез линейных электрических цепей методом схемных определителей : учебное пособие / К. С. Горшков, Ю. В. Токарев, В. В. Филаретов. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 240 с.
13. Горшков, К. С. Схемно-символьный анализ электрических цепей с многомерными управляемыми источниками / К. С. Горшков, В. В. Филаретов ; под ред. В. В. Филаретова // *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.* – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 72-79.

14. Горшков, К. С. Схемный подход Вильгельма Фойснера и метод схемных определителей / К. С. Горшков, В. В. Филаретов ; под ред. В. В. Филаретова. – Ульяновск : Изд-во УлГТУ, 2009. – 189 с.
15. Гришкевич, А. А. Комбинаторные методы исследования экстремальных структур математических моделей электрических цепей и систем / А. А. Гришкевич. – Челябинск : Изд. ЮУрГУ, 2004. – 258 с.
16. Денисенко, В. В. Методы моделирования СБИС с использованием полунатурной модели МОП-транзистора: Автореф. дис. докт. техн. Наук : 05.27.01 (Твердотельная электроника, радиоэлектронные компоненты, микро- и нано-электроника, приборы на квантовых эффектах) / В. В. Денисенко ; Таганрогский технологический ин-т Южного федерального ун-та.– Таганрог, 2010. – 32 с.
17. Дмитришин, Р. В. Диакоптический алгоритм анализа сложных линейных цепей на ЭВМ / Р. В. Дмитришин, Ю. И. Шаповалов // Автоматизация проектирования в электронике. – Киев, 1975. – Вып. 12. – С. 42-46.
18. Долбня, В. Т. Топологические методы анализа и синтеза электрических цепей и систем / В. Т. Долбня. – Харьков : Изд-во «Вища школа» при Харьк. гос. ун-те, 1974. – 145 с.
19. Ерохов, И. В. Библиография: Кирхгоф Г. Избранные труды / И. В. Ерохов. – М. : Наука, 1988.
20. Ерохов, И. В. Реконструкция первого топологического метода расчета электрических цепей, созданного Г. Кирхгофом / И. В. Ерохов // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика : Тр. международ. конф. КЛИН–2006. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 76-83.
21. Ерохов, И. В. Исследование начал теории электрических цепей / И. В. Ерохов. – Запорожье : Классический приватный ун-т, 2009. – 100 с.
22. Зелях, Э. В. Основы общей теории линейных электрических схем / Э. В. Зелях. – М. : Изд-во АН СССР, 1951. – 336 с.
23. История электротехники / Академия электротехнических наук РФ ; под редакцией И. А. Глебова. – М. : Изд-во МЭИ, 1999. – 524 с.
24. Кирхгоф, Г. Р. Избранные труды / Г. Р. Кирхгоф. – М. : Наука, 1988. – 428 с.
25. Компьютерная алгебра : Символьные и алгебраические вычисления / Под ред. Б. Бухбергера, Дж. Коллинза, Р. Лооса. – М. : Мир, 1986. – 392 с.
26. Королев, Ф. А. Символьный анализ линейных электрических цепей методом объединения схемно-алгебраических формул / Ф. А. Королев, С. А. Курганов, В. В. Филаретов // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей : Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2006. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 98-115.
27. Королев, Ф. А. Сравнение методов анализа электрических цепей по частям в символьном виде / Ф. А. Королев, С. А. Курганов, В. В. Филаретов // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2007. – Ульяновск : УлГТУ, 2007. – Т. 3. – С. 91-104.

28. Королев, Ф. А. О методе замещения управляемых источников независимыми источниками (по поводу статьи Г. А. Белова и В. Г. Захарова в журнале «Электричество») / Ф. А. Королев, В. В. Филаретов // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. междунар. конф. КЛИН–2006. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 220-230.
29. Королев, Ф. А. Сравнение единых и последовательных выражений матричных определителей по точности вычислений / Ф. А. Королев, В. В. Филаретов ; под ред. В. В. Филаретова. // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 110-127.
30. Королев, Ф. А. Сравнение методов получения схемных функций для электрических цепей с управляемыми источниками / Ф. А. Королев, В. В. Филаретов // Электричество. – 2008. – №5. – С. 42-53.
31. Курганов, С. А. Символьный анализ линейных электронных цепей на основе схемно-алгебраических формул выделения параметров многополюсников / С. А. Курганов, В. В. Филаретов // Электричество. – 2003. – №6. – С. 52-65.
32. Курганов, С. А. Анализ установившихся режимов линейных электрических цепей методом схемных определителей : учебное пособие / С. А. Курганов, В. В. Филаретов. – Ульяновск : УлГТУ, 2003. – 148 с.
33. Курганов С. А., Филаретов В. В. Символьный анализ и диагностика линейных электрических цепей методом схемных определителей : учебное пособие / С. А. Курганов, В. В. Филаретов. – Ульяновск : УлГТУ, 2004. – 228 с.
34. Курганов С.А., Филаретов В.В. Неявный принцип наложения воздействий в линейных электрических цепях / С. А. Курганов, В. В. Филаретов // Электричество. – 2005. – №1. – С. 32-43.
35. Курганов, С. А. Схемно-алгебраический анализ, диакоптика и диагностика линейных электрических цепей : учебное пособие / С. А. Курганов, В. В. Филаретов. – Ульяновск : УлГТУ, 2005. – 320 с.
36. Курганов С. А., Филаретов В. В. Символьный анализ линейных аналоговых и дискретно-аналоговых электрических цепей : учебное пособие / С. А. Курганов, В. В. Филаретов. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 300 с.
37. Курганов, С. А. Схемно-символьный и матрично-численный анализ установившихся режимов линейных электрических цепей : метод. указания / С. А. Курганов, В. В. Филаретов, Д. В. Шеин. – Ульяновск : УлГТУ, 2002. – 56 с.
38. Лаксберг, Э. А. Моделирование электронных цепей на основе схемной редукции / Э. А. Лаксберг. – Таллин : Валгус, 1990. – 159 с.
39. Максвелл, Д. К. Трактат об электричестве и магнетизме. В 2-х тт. Т. 1 / Д. К. Максвелл. – М. : Наука, 1989. – 416 с.
40. Математический энциклопедический словарь / Под ред. Ю. В. Прохорова. – М. : Советская энциклопедия, 1988. – 847 с.
41. Миланцей, Т. Идеальный усилитель Теллегена / Т. Миланцей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Тр. междунар. конф. КЛИН–2007. – Ульяновск : УлГТУ, 2007. – Т. 3. – С. 222-234.

42. Миланцей, Т. Пять формул метода схемных определителей / Т. Миланцей, Г. Н. Славский, В. В. Филаретов // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2004. – Ульяновск : УлГТУ, 2004. – Т. 4. – С. 102-113.

43. Миланцей, Т. От идеального усилителя Теллегена до многомерного неудаляемого управляемого источника / Т. Миланцей, В. В. Филаретов // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез и анализ: Тр. международ. конф. КЛИН–2005. – Ульяновск : УлГТУ. – 2005. – Т. 3. – С. 140-155.

44. Миланцей, Т. Правило Кирхгофа для нахождения числителя и знаменателя схемной функции по ее знаменателю (по поводу статьи Г. А. Белова и В. Г. Захарова в журнале «Электричество») / Т. Миланцей, В. В. Филаретов // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2005. – Ульяновск : УлГТУ, 2005. – Т. 3. – С. 217-220.

45. Мэзон, С. Электронные цепи, сигналы и системы / С. Мэзон, Г. Циммерман. – М. : Изд-во иностранной лит., 1963. – 620 с.

46. Реньи, А. О математической теории деревьев / А. Реньи // Трилогия о математике. – М. : Мир, 1980. – С. 353-375.

47. Робишо, Л. Направленные графы и их приложение к электрическим цепям и машинам / Л. Робишо, М. Буавер, М. Робер. – М. ; Л. : Энергия, 1964. – 248 с.

48. Сешу, С. Линейные графы и электрические цепи / С. Сешу, М. Б. Рид. – М. : Высш. шк., 1971. – 448 с.

49. Сигорский, В. П. Анализ электронных схем / В. П. Сигорский. – Киев : Гос. изд-во техн. лит. УССР, 1960. – 176 с.

50. Теоретические основы электротехники. Т. 1 / П. А. Ионкин, А. И. Даревский, Е. С. Кухаркин и др. – М. : Высш. шк., 1976. – 544 с.

51. Тимкин, Ю. В. Анализ электронных схем методом двунаправленных графов / Ю. В. Тимкин. – М. : Энергоатомиздат, 1985. – 256 с.

52. Токарев, Ю. В. Теоретико-множественная интерпретация выделения управляемых источников / Ю. В. Токарев ; под ред. В. В. Филаретова // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 251-261.

53. Трохименко, Я. К. Метод обобщенных чисел и анализ линейных цепей / Я. К. Трохименко. – М. : Советское радио, 1972. – 212 с.

54. Филаретов, В. В. Алгоритм формирования экономных буквенно-численных выражений для коэффициентов схемных функций / В. В. Филаретов // Электронное моделирование. – 1987. – №4. – С. 33-35.

55. Филаретов, В. В. Унисторно-сигнальный граф электронной схемы и его анализ / В. В. Филаретов // Электричество. – 1989. – №9. – С. 48-55.

56. Филаретов, В. В. Неявный принцип наложения и анализ линейных электрических цепей / В. В. Филаретов // Электричество. – 1990. – №3. – С. 37-43.

57. Филаретов, В. В. Разложение определителя гибридного графа схемы с усилителями напряжения методом удаления и стягивания сигнальных дуг / В. В. Филаретов // Электрон. моделирование. – 1990. – №3. – С. 38-44.

58. Филаретов, В. В. Программа SYMBOL автоматического вывода передаточной функции электронной схемы произвольной структуры / В. В. Филаретов // Алгоритмы и устройства обработки сигналов и автоматизация проектирования. – Таллин : АН Эстонии, 1991. – С. 130-148.

59. Филаретов, В. В. Алгоритм приведения развернутых алгебраических выражений топологических функций к скобочной форме и его реализация в программе SYMBOL / В. В. Филаретов // Алгоритмы и устройства обработки сигналов и автоматизация проектирования. – Таллин : АН Эстонии, 1991. – С. 149-166.

60. Филаретов, В. В. Диакоптика унисторно-сигнального графа электронной схемы / В. В. Филаретов // Теорет. электротехника. – Львов, 1992. – Вып. 51. – С. 48-54.

61. Филаретов, В. В. Топологический анализ электронных схем методом выделения ветвей и дуг / В. В. Филаретов // Электричество. – 1992. – №7. – С. 31-37.

62. Филаретов, В. В. Исследования Вильгельма Фойснера в области теоретической электротехники / В. В. Филаретов // Электричество. – 1992. – №9. – С. 64-67.

63. Филаретов, В. В. Обобщенный унисторный граф электронной схемы и его анализ / В. В. Филаретов // Электричество. – 1993. – №5. – С. 65-70.

64. Филаретов, В. В. Оптимизация формул схемных функций электрических цепей / В. В. Филаретов // Электричество. – 1993. – №9. – С. 64-68.

65. Филаретов, В. В. Приоритеты в науке, или еще об одном слагаемом успеха / В. В. Филаретов // Электричество. – 1994. – №12. – С. 63-64.

66. Филаретов, В. В. Синтез оптимальных формул схемных функций электрических цепей / В. В. Филаретов // Электричество. – 1995. – №4. – С. 36-43.

67. Филаретов, В. В. Оптимальная реализация дешифраторного метода анализа электрических цепей / В. В. Филаретов // Электричество. – 1996. – №10. – С. 43-49.

68. Филаретов, В. В. Схемный подход к символьному анализу активных электрических цепей / В. В. Филаретов // Электроника и связь : Науч.-техн. сб. – Киев, 1997. – Вып. 2. – Ч. 1. – С. 97-101.

69. Филаретов, В. В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров / В. В. Филаретов // Электричество. – 1998. – №5. – С. 43-52.

70. Филаретов, В. В. Анализ электрических цепей методом схемных определителей : метод. указания к практическим занятиям по электротехнике и электронике / В. В. Филаретов. – Ульяновск : УлГТУ, 2001. – 40 с.

71. Филаретов, В. В. О взаимосвязи схемного и матричного определителей / В. В. Филаретов // Системы искусственного интеллекта: Алгоритмы обработки и модели: Тр. международ. конф. КЛИН–2002. – УлГТУ. – 2002. – Т. 4. – С. 85-92.

72. Филаретов, В. В. Состояние и проблемы развития схемного подхода к символьному анализу электрических цепей / В. В. Филаретов // Синтез, анализ

и диагностика электронных цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2007. – Ульяновск : УлГТУ, 2007. – Т. 3. – С. 196-207.

73. Халютин, С. П. Метод предельных состояний для нахождения напряжения и тока в линейной электрической цепи / С. П. Халютин, А. А. Титов // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2008. – №11.

74. Халютин, С. П. Метод предельных состояний: Символьный анализ электрических цепей : учебное пособие / С. П. Халютин, А. А. Титов ; под ред. С. П. Халютина. – М. : Военно-воздушная инженерная академии (ВВИА) им. Н. Е. Жуковского, 2009.

75. Сигнальные графы электрических цепей : учеб. пособие / М. А. Шакиров, Р. П. Кияткин, Т. И. Королева, и др. – Л. : Ленингр. гос. техн. ун-т, 1991. – 74 с.

76. Шибицкий, В. П. Минимизация избыточности в топологическом методе анализа активных трехполосников на ЭВМ / В. П. Шибицкий // Электрон. моделирование. – 1981. – №2. – С. 101-103.

77. Ahrens W. Ueber das Gleichungssystem einer Kirchhoff'schen galvanischen Stromverzweigung // Mathematische Annalen. – Leipzig, 1897. – Bd 49. – S. 311–324.

78. Braun J. Topological analysis of networks containing nullators and norators // Electronics letters. – 1965. – Vol. 2, No. 11. – P. 427-428.

79. Breuer M. A. Generation of optimal code for expressions via factorization // Communications of the Association for computing machinery. – 1969. – Vol. 12, №6. – P. 333-340.

80. Dmytryshyn R., Kubaszek A. Sequence of expressions generation for the repetitive analysis acceleration // Proceedings of the fifth international workshop on Symbolic Methods and Applications in Circuit Design (SMACD). – Kaiserslautern, 1998. – P. 154-159.

81. Fernandez F. V., Wambacq P., Gielen G., Rodriguez-Vazquez A., Sansen W. Symbolic analysis of large analog integrated circuits by approximation during expression generation // IEEE Proceedings of the international symposium on circuits and systems (ISCAS). – 1994. – P. 25-28.

82. Feussner W. Ueber Stromverzweigung in netzformigen Leitern // Annalen der Physik. – 1902. – Bd 9, N 13. – S. 1304-1329.

83. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstarke in netzformigen Leitern // Annalen der Physik. – 1904. – Bd 15, №12. – S. 385-394.

84. Filaretov V. V. A unistor signal flow graph for an electronic circuit and its analysis // Electrical technology. – 1989. – №3. – 14 p.

85. Filaretov V. V. Improved decoding method for electrical network analysis // Electrical technology. – 1996. – N 4. – P. 41-53.

86. Filaretov V. V. A topological analysis of electronic circuits by a parameter extraction method // Electrical technology. – 1998. – №2. – P. 46-61.

87. Filaretov V. V., Korotkov A. S. Generalized parameter extraction method in network symbolic analysis // Proceedings of the European conference on circuit theory and design (ECCTD–2003). – Kraków, Poland, 2003. – Vol. 2. – P. 406-409.

88. Filaretov V.V., Korotkov A.S. Generalized parameter extraction method in case of multiple excitation // Proceedings of the 8th international workshop on Symbolic Methods and Applications in Circuit Design. – Wroclaw (September 23-24). – 2004. – P. 8-11.

89. Gielen G. Symbolic analysis methods and applications – An overview // IEEE Proceedings of the international symposium on circuits and systems (ISCAS). – 1992. – P. 1141-1144.

90. Hashemian R. Symbolic representation of network transfer functions using norator-nullator pairs // Electronic circuits and systems. – 1977. – Vol. 1, №6 (November). – P. 193-197.

91. Kirchhoff G. R. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird // Annalen der Physik. – 1847. – Bd. 72. – S. 498-508.

92. Knuth D. E. The art of computer programming (Pre-fascicle 4). A draft of section 7.2.1.6: Generating all trees. – Addison-Wesley, Stanford University. – 2004. – Vol. 4. – 81 p.

93. Kumar P., Senani R. Bibliography on nullors and their applications in circuit analysis, synthesis and design // Analog integrated circuits and signal processing. – 2002. – Vol. 33. – P. 65-76.

94. Lin P.M. Symbolic network analysis. – Amsterdam–Oxford–New York–Tokyo : Elsevier, 1991. – 319 p.

95. Milic M. M. General passive networks – solvability, degeneracies, and order of complexity // IEEE Transactions on circuits and systems. – 1974. – Vol. CAS-21, No. 2 (March). – P. 177-183.

96. Minty G. J. A simple algorithm for listing all trees of a graph // IEEE Transactions on circuit theory. – 1965. – Vol. CT-12, N 1. – P. 120.

97. Muir T. The theory of determinants in the historical order of development. Part I and II – General and special determinants up to 1841. – London : MacMillan and Co, 1906. – 503 p.

98. Ozawa T. Topological conditions for the solvability of linear active networks // Circuit Theory and Applications. – 1976. – Vol. 4. – P. 125-136.

99. Parten M. E. Seacat R. H. Topological analysis of networks containing nullators and norators using residual networks // 23rd annual Southwestern IEEE conference and exhibition. – New York, USA, 1971. – P. 39-42.

100. Percival W. S. The solution of passive electrical networks by means of mathematical trees // Proceeding of the IEE. – 1953. – Vol. 100, pt. 3, №65. – P. 143-150.

101. Rodanski B. Computational Efficiency of Symbolic Sequential Formulae // 6th International Workshop on Symbolic Methods and Applications in Circuit Design (SMACD-2000). – 2000. – P. 45-50.

102. Tellegen B. D. H. La recherche pour una série complète d'éléments de circuit idéaux non-linéaires // Rendiconti del seminario matematico e fisico di Milano: Sotto gli auspice dell'università e del politecnico. – Milano, 1955. – Vol. 25 (1953-1954). – P. 134-144.

103. Weinberg L. Kirchhoff's «Third and fourth laws» // IRE Trans. on circuit theory. – 1958. – Vol. CT-5, N1. – P. 8-30.

104. Wheatstone C. Beschreibung verschiedener neuen Instrumente und Methoden zur Bestimmung der Constanten einer Volta'schen Kette // Annalen der Physik und Chemie. – Leipzig, 1844. – Bd 62. – S. 499-543.

Научное издание

КУРГАНОВ Сергей Александрович,
ФИЛАРЕТОВ Владимир Валентинович

**ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ
ДЛЯ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ БЕЗ ИЗБЫТОЧНОСТИ**

Редактор М. В. Штаева

ЛР № 020640 от 22.10.97.

Подписано в печать 28.12.2010. Формат 60×84/16.

Усл. печ. л. 6,51. Тираж 200 экз. Заказ 213.

Ульяновский государственный технический университет
432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, 32.

Типография УлГТУ. 432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, 32.