

## **ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ С ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫМИ КОНДЕНСАТОРАМИ, УЧИТЫВАЮЩИЙ СОПРОТИВЛЕНИЕ КЛЮЧЕЙ**

Е. В. Белобров, С. А. Курганов

*Предложены комплексные схемы замещения типовых элементов с переключаемыми конденсаторами (ПК), учитывающие сопротивления ключей в замкнутом состоянии. Схемы применяются для частотного анализа цепей с развязанными между собой элементами, в частности, с помощью операционных усилителей. С помощью предложенных схем проведено исследование частотных характеристик фильтра на базе ПК.*

При анализе электрических цепей с ПК в частотной области применяются комплексные схемы замещения типовых элементов, содержащих идеальные ключи [1]. В разомкнутом состоянии современные электронные ключи на МОП-транзисторах действительно имеют сопротивление, близкое к бесконечному. Однако в замкнутом состоянии сопротивление ключа существенно отличается от нулевого и составляет значение – 2...10 кОм [2], чтобы оценить его влияние на частотные характеристики цепей с ПК приходится использовать численный анализ во временной области [2,3]. В то же время временной анализ значительно более трудоемок, чем анализ в частотной области, поскольку требует расчета вплоть до окончания переходного процесса. Временной анализ не позволяет также получить передаточную функцию цепи в символьном виде, которая требуется при проектировании фильтров, например, для оценки их устойчивости [4]. Поэтому целесообразно решить задачу частотного анализа цепей с ПК, учитывающего сопротивление ключей.

Для решения этой задачи необходимо разработать *комплексные схемы замещения типовых элементов с ПК, учитывающие сопротивления ключей*. Эти схемы должны быть пригодными для получения передаточных функций известными, в том числе, и символьными [5] методами анализа цепей.

**Построение z-схем замещения элементов с ПК, учитывающих сопротивление ключа.** Такие схемы замещения можно получить путем применения z-преобразования к временным функциям приращений зарядов в каждой фазе схемы элемента с ПК, учитывающей сопротивление ключей. Преобразование можно применять отдельно к каждому элементу с ПК – типовому или произвольно выбранному, если его собственные частоты (постоянные времени) не зависят от других элементов с ПК, то есть все элементы развязаны между собой, например, содержат операционные усилители, характеристики которых близки к идеальным. Входное  $u_1$  и

выходное  $u_2$  напряжение на внешних полюсах элемента с ПК считаются постоянными в течение полупериода переключения.

Алгоритм построения комплексных схем замещения, учитывающих сопротивления ключей, состоит в следующем.

1. Для элемента с ПК построить во временной области схемы, каждая из которых соответствует одной из фаз переключения ключей. Ключи в замкнутом состоянии заменить резистором  $R$ , а в разомкнутом – разрывом.

2. Провести анализ во временной области каждой из полученных схем замещения при условии, что на полюсах элемента действует постоянное напряжение, величина которого равна напряжению, достигнутому на предыдущей фазе.

3. Для всех полюсов, за исключением базисного, записать разностные уравнения, связывающие приращения зарядов полюсов и их напряжения на разных фазах переключения ключей.

4. Применить к полученным уравнениям  $z$ -преобразование. Число уравнений на единицу меньше числа полюсов.

5. Используя уравнения в  $z$ -области, построить  $z$ -схему замещения многополюсника, соответствующего элементу с ПК.

**Построение  $z$ -схем для типовых двухфазных элементов.** Рассмотрим подробно получение  $z$ -схем для последовательного (рис. 1,а) и параллельного (рис. 1,г) переключаемых конденсаторов. Напряжения  $U^e$  и  $U^o$  с нижними индексами 1 и 2, соответствующими входу и выходу элемента – дискретные напряжения, которые на нечетном (рис. 1,в,е) и четном полупериоде (рис. 1,б,д) соответственно равны нулю, а в другие полупериоды равны  $U$ .

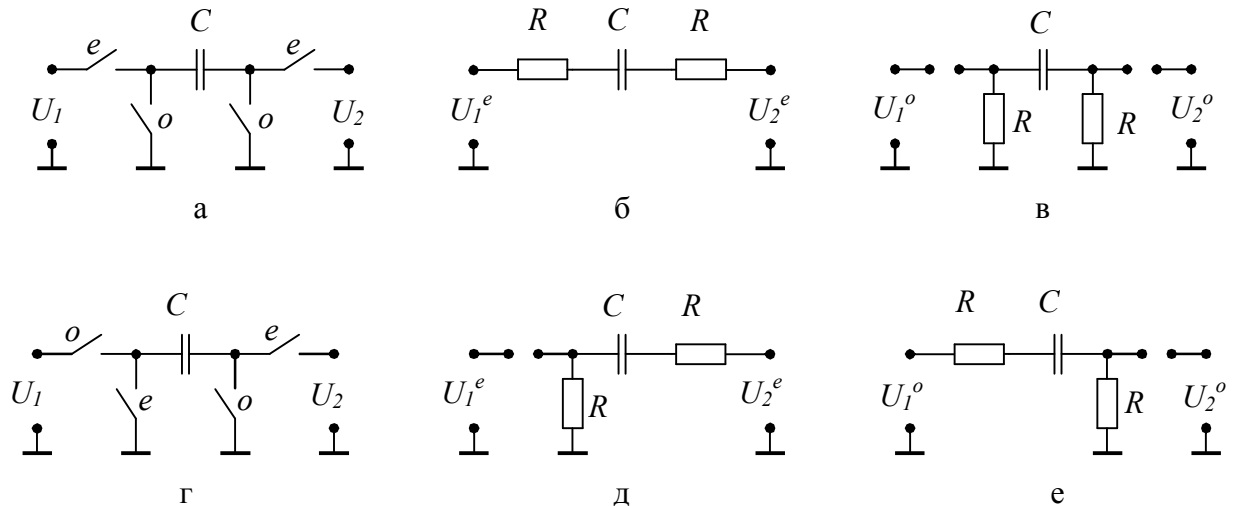


Рис. 1. Схемы переключаемых конденсаторов: последовательного (а), ее схемы замещения в четные (б) и нечетные (в) фазы; параллельного (г), ее схемы замещения в четные (д) и нечетные (е) фазы

Напряжение на входе и выходе переключательного элемента:

$$U = U^e + U^o \quad (1)$$

Для конденсатора  $C$  на рис. 1,б справедливо следующее уравнение заряда:

$$q^e(t) = C \cdot \Delta U^e \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right)\right) \quad (2a)$$

где  $\Delta U^e$  – разность потенциалов между  $U_1^e$  и  $U_2^e$ .

Уравнение разряда конденсатора  $C$  (рис. 1,в):

$$q^o(t) = q_0 \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right) \quad (2б)$$

где  $q_0 = q^e(\tau^o)$  – заряд, накопленный на конденсаторе до момента замыкания или размыкания ключей  $\tau^o$  в начале нечетного интервала.

Пусть каждое значение напряжения  $\Delta U$  с соответствующим цифровым индексом (рис. 2) будет считаться отсчетом последовательности. Эти отсчеты следуют через интервал  $\tau = T/2$ , где  $T$  – период переключения.

Значениям  $X$  соответствует напряжение на конденсаторе. В каждом четном интервале  $X_i^e$  стремится к значению  $\Delta U_i^e$ . В нечетном интервале  $X_i^o$  стремится к нулю. На рис. 2 видно, что при постоянной времени  $2RC$ , соизмеримой с интервалом переключения, напряжение  $X_i$  не успевает достичь значения  $\Delta U_i^e$  или нуля. Запишем уравнения для отсчетов

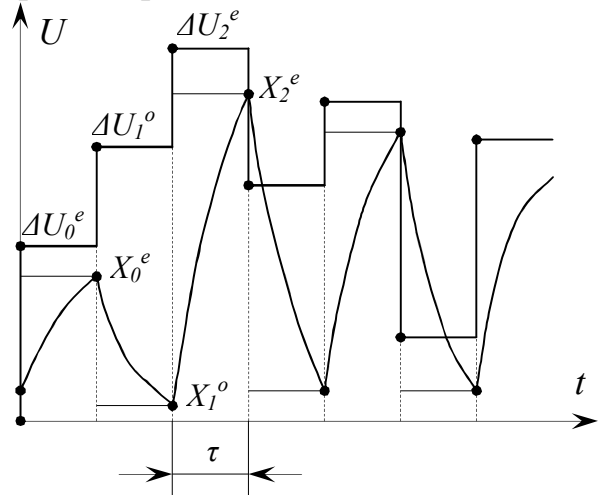


Рис. 2

$$X_i^e = X_{i-1}^o + (\Delta U_i^e - X_{i-1}^o) \left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{2RC}\right)\right), \quad (3a)$$

$$X_i^o = X_{i-1}^e \exp\left(-\frac{\tau}{2RC}\right). \quad (3б)$$

Применим  $z$ -преобразование по отношению к (3), получим

$$X^e(z) = X^o(z) z^{-\frac{1}{2}} + \left(\Delta U^e(z) - X^o(z) z^{-\frac{1}{2}}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{2RC}\right)\right) \quad (4a)$$

$$X^o(z) = X^e(z)z^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\tau}{2RC}\right) \quad (4б)$$

Решая уравнения (4) относительно  $X^e(z)$  и  $X^o(z)$ , окончательно получим:

$$X^e(z) = \Delta U^e(z) \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{2RC}\right)}{1 - z^{-1} \exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right)}, \quad (5а)$$

$$X^o(z) = \Delta U^e(z) z^{-\frac{1}{2}} \frac{\left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{2RC}\right)\right) \exp\left(-\frac{\tau}{2RC}\right)}{1 - z^{-1} \exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right)}. \quad (5б)$$

Для построения схемы в  $z$ -области для цепи, изображенной на рис. 1,а, составим уравнения переноса зарядов [1]. Эта схема будет содержать 4 полюса.

$$\Delta Q_1^e(z) = C \left( X_1^e(z) - X_1^o(z) z^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (6а) \quad \Delta Q_1^o(z) = 0 \quad (6в)$$

$$\Delta Q_2^e(z) = C \left( X_2^e(z) - X_2^o(z) z^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (6б) \quad \Delta Q_2^o(z) = 0 \quad (6г)$$

где  $X_1 = -X_2 = X$ . Уравнения (6) показывают, какое количество заряда прошло через полюса в соответствующий интервал переключения. Приращение заряда  $\Delta Q^o = 0$ , потому что в нечетный интервал переключения заряд через полюса не проходит, поскольку ключ разомкнут (рис. 1,в). Подставляя (5) в (6), получим:

$$\Delta Q_1^e(z) = Cz' \left( U_1^e(z) - U_2^e(z) \right) \quad (7а) \quad \Delta Q_1^o(z) = 0 \quad (7в)$$

$$\Delta Q_2^e(z) = Cz' \left( U_2^e(z) - U_1^e(z) \right) \quad (7б) \quad \Delta Q_2^o(z) = 0 \quad (7г)$$

где  $z' = \frac{\left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{2RC}\right)\right) \left(1 - z^{-1} \exp\left(-\frac{\tau}{2RC}\right)\right)}{1 - z^{-1} \exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right)}$ .

Множитель  $z'$  показывает зависимость эквивалентной емкости схемы как от частоты сигнала, так и от частоты переключения. Следует также отметить, что выведенный множитель действителен только для равных четных и нечетных интервалов переключения. При необходимости, множитель можно обобщить на случай произвольных длительностей интервалов. Полученная эквивалентная схема в  $z$ -области показана на рис. 3.

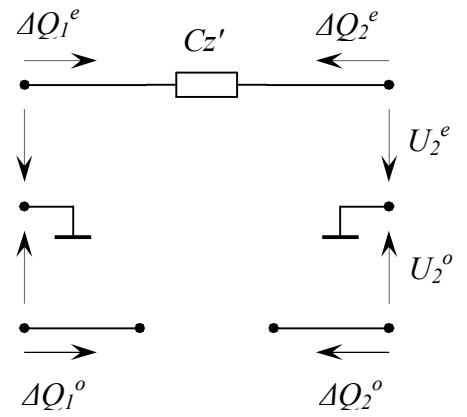


Рис. 3

Эквивалентную схему для цепи на рис. 1,г построим аналогично. Запишем только результирующие уравнения переноса зарядов, без промежуточных выкладок:

$$\Delta Q_1^e(z) = 0 \quad (8a) \quad \Delta Q_1^o(z) = Cz'U_1^o(z) + Cz^{-\frac{1}{2}}z''U_2^e(z) \quad (8b)$$

$$\Delta Q_2^o(z) = 0 \quad (8c) \quad \Delta Q_2^e(z) = Cz'U_2^e(z) + Cz^{-\frac{1}{2}}z''U_1^o(z) \quad (8d)$$

где  $z'' = \frac{\left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{2RC}\right)\right)^2}{1 - z^{-1} \exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right)}$ .

В табл. 1 приведены  $z$ -схемы для других типовых переключаемых элементов с учетом сопротивления ключа. При нулевом сопротивлении ключа эти схемы совпадают со схемами замещения [1].

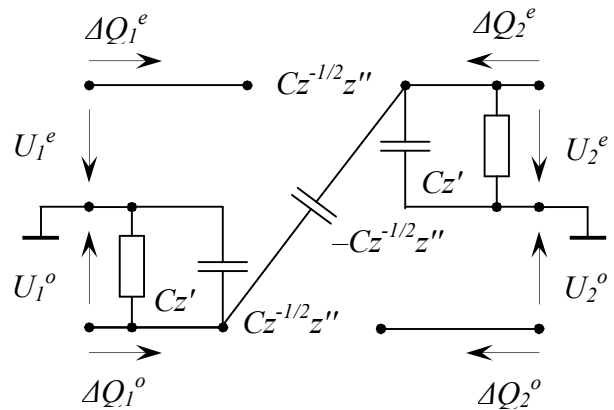
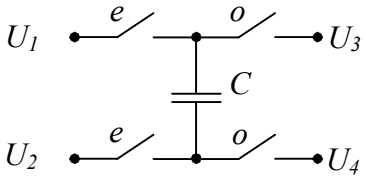
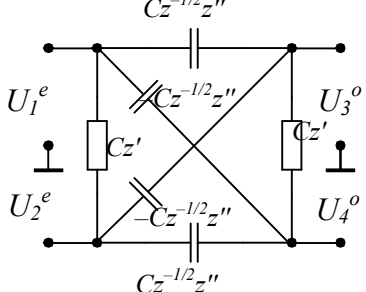
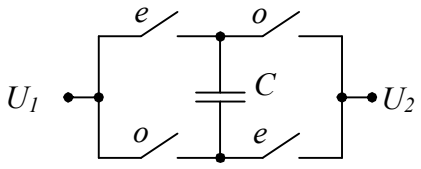
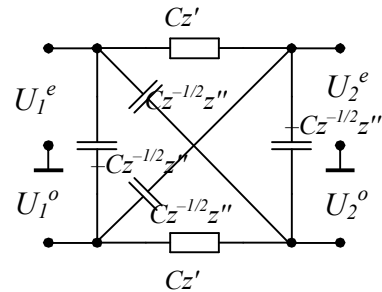
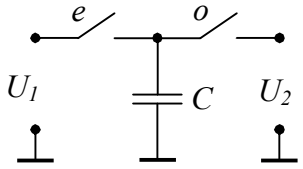
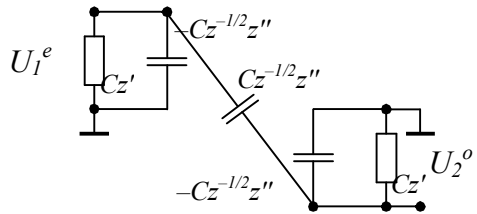
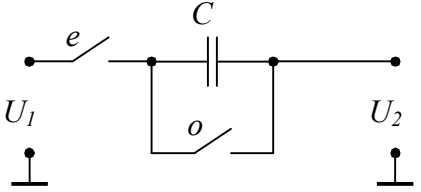
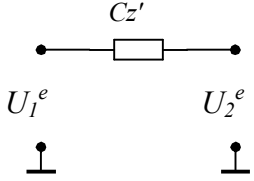


Рис. 4

Анализ цепей с помощью предлагаемых  $z$ -схем состоит в выделении развязанных между собой элементов с ПК, нахождении схем замещения этих элементов, составлении  $z$ -схемы замещения всей цепи и нахождении с помощью известных методов анализа коэффициент передачи напряжения  $K(z)$  с учетом сопротивления ключа.

Таблица 1. Схемы в  $z$ -области для типовых двухфазных переключаемых элементов с учетом сопротивления ключей

Исходная цепь с ПК	Эквивалентная схема в $z$ -области
Схема переключаемого конденсатора общего вида	
	
ПК-эквивалент билинейного резистора	
	
Параллельный переключаемый конденсатор с двумя ключами	
	
Последовательный переключаемый конденсатор с двумя ключами	
	

**Методика анализа цепей с ПК в частотной области, учитывающая сопротивление ключей.**

1. Выделить элементы с ПК, которые развязаны между собой.

2. Выделенные элементы сопоставляются с теми, которые представлены в табл. 1. Для отсутствующих элементов составляются  $z$ -схемы замещения по алгоритму, представленному выше. Схема замещения непереключаемого конденсатора остается без изменения [1].

3. Элементы с ПК в исходной схеме заменяются на полученные  $z$ -схемы замещения.

4. Аналитически, либо с применением программ символьного моделирования находится комплексная передаточная функция. При задании исходных данных для системы SCAD [6] элемент  $Cz'$  заменяется на резистивную проводимость, а элемент  $Cz''z^{-1/2}$  на емкостную проводимость.

5. После получения символьного результата для элементов, содержащих ключи, осуществляется замена параметров. К элементам переключаемых элементов добавляются множители. Элемент  $C_n$  заменяется на  $C_n \cdot z'(C_n)$ , а  $C_n \cdot p$  на  $C_n \cdot z^{\frac{1}{2}} \cdot z''(C_n)$ . Здесь  $C_n$  – номинал конденсатора, входящего в переключаемый элемент. В свою очередь, как было показано выше,  $z'$ ,  $z''$  есть функции от  $z$ . Поэтому порядок полиномов увеличивается.

6. Комплексная передаточная функция цепи получается, как обычно, путем замены  $z = \exp(j\omega T)$ .

**Анализ фильтра с ПК, учитывающего сопротивления ключей.**  
Рассмотрим схему на основе биквадной секции Флешера–Лейкера (рис. 5).

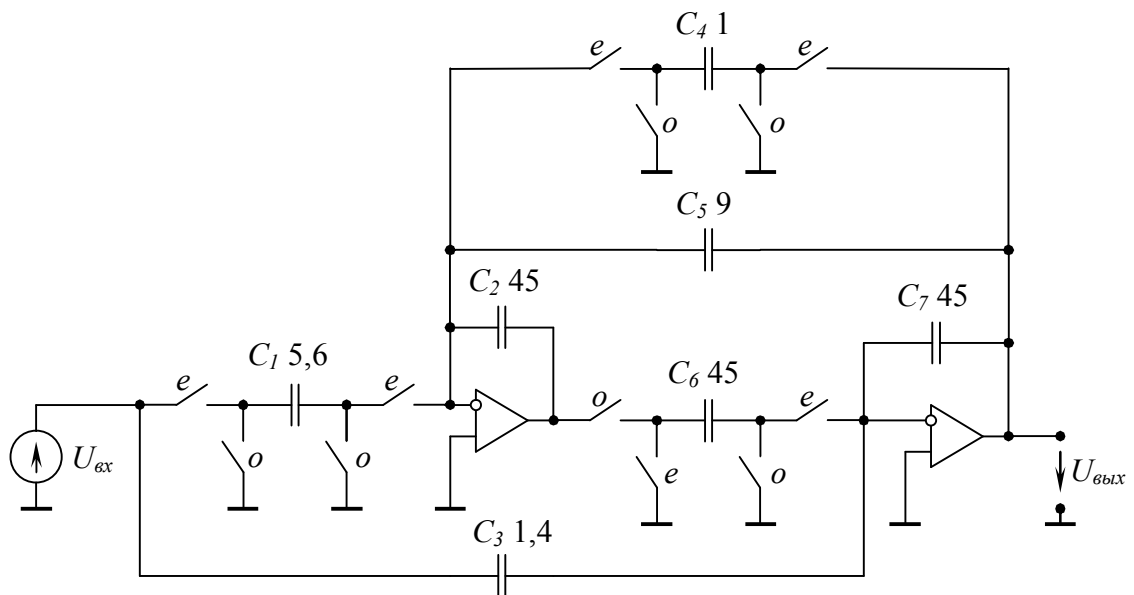


Рис. 5. Схема ФНЧ 2-го порядка

Схема представляет ФНЧ с аппроксимацией Баттерворта, с частотой среза 25 кГц по уровню  $-3$  дБ, усиление на нулевой частоте 15 дБ, частота переключений 1 МГц. Операционные усилители считаются идеальными. Схема замещения фильтра с учетом сопротивлений ключей дана на рис. 6.

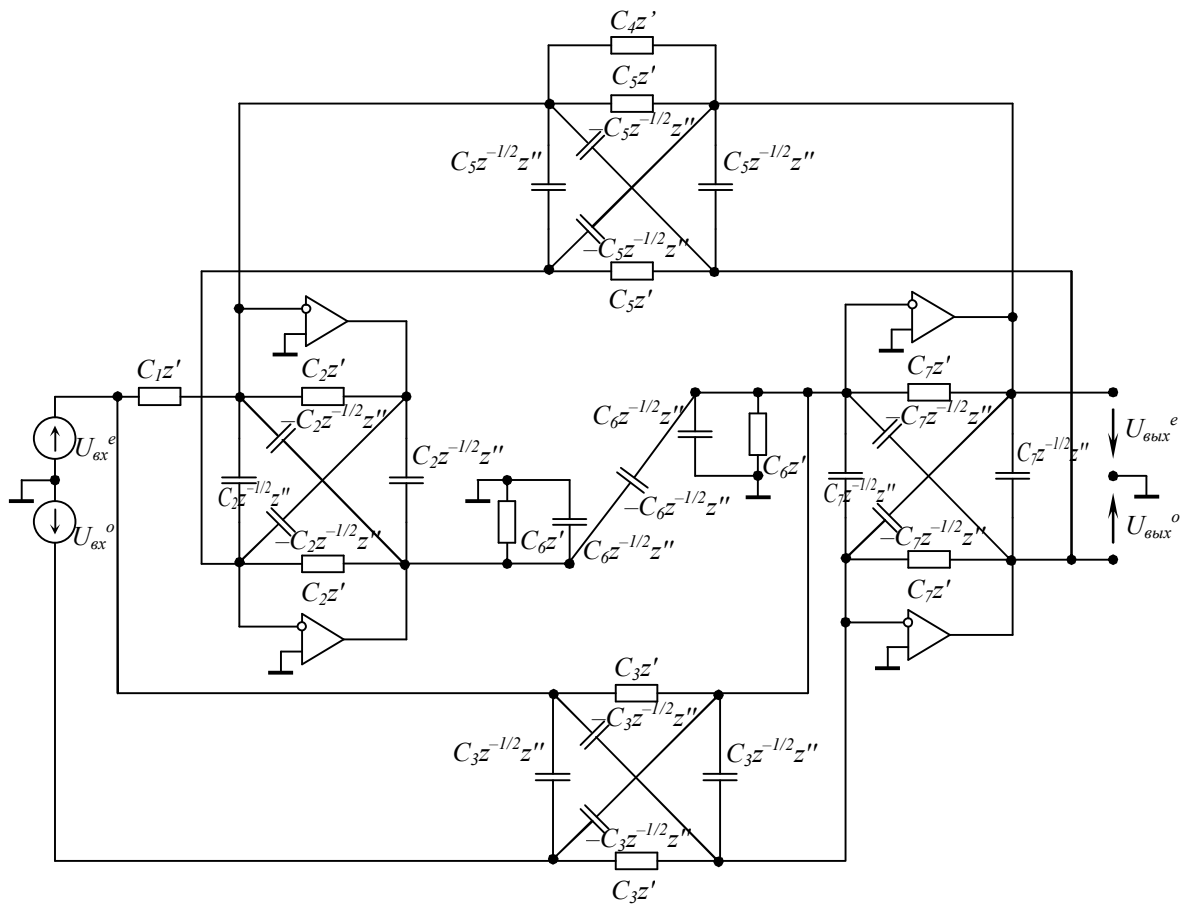


Рис. 6. Схема фильтра в  $z$ -области

Результат анализа схемы, полученный программой *SCAD* [6] по методу, предложенному в [5], имеет громоздкий вид и, для простоты, представим в численной нормированной форме:

$$\begin{aligned}
 K(z) = & -\frac{-2,20348 \cdot 10^{-54} z^{-5} + 5,92322 \cdot 10^{-11} z^{-4} - 3,37145 \cdot 10^{-3} z^{-3}}{-7,08263 \cdot 10^{-53} z^{-5} + 1,90389 \cdot 10^{-9} z^{-4} - 1,08368 \cdot 10^{-1} z^{-3}} \rightarrow \\
 \rightarrow & \frac{+3,78466 \cdot 10^{-2} z^{-2} - 9,60333 \cdot 10^{-3} z^{-1} + 3,11111 \cdot 10^{-2}}{+1,12674 z^{-2} - 2,00837 z^{-1} + 1}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Построим с помощью (9) две частотные характеристики: одну для идеального ключа, другую для  $R_o = 5$  кОм (рис. 7). Сопротивление ключей вносит весомый вклад в частотные характеристики фильтра. При этом в полосе пропускания наблюдается подъем амплитудно-частотной характеристики (АЧХ), а в полосе заграждения – спад.



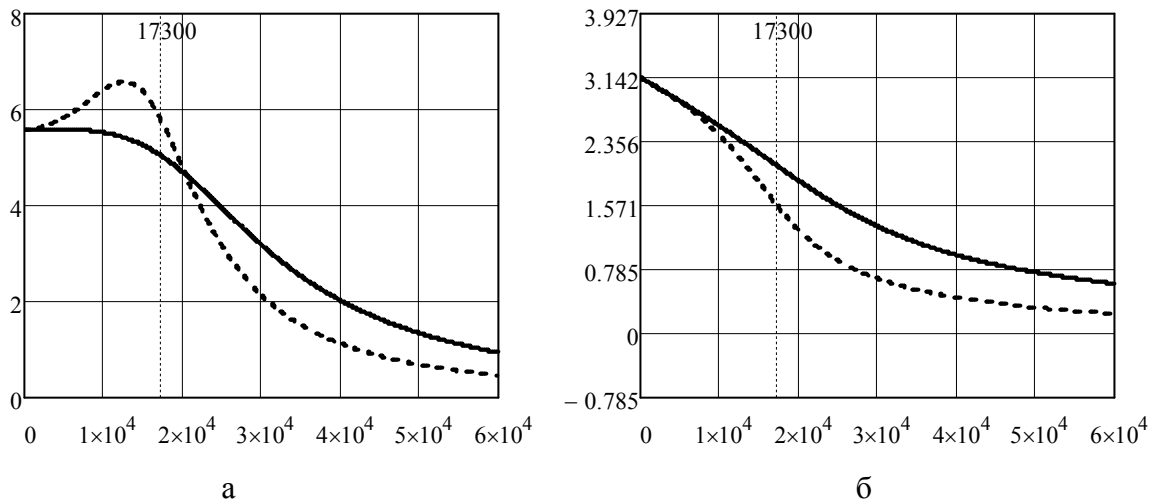


Рис. 7. АЧХ (а) и ФЧХ (б), сплошной линией показаны частотные характеристики идеальной схемы, пунктирной – с сопротивлением ключа  $R_0 = 5 \text{ кОм}$

Для сравнения АЧХ схемы на рис. 6 с учетом сопротивления ключей в 5 кОм были получены также во временной области с помощью системы *Multisim 10* [7] путем приведения временной функции выходного напряжения к установившемуся режиму на каждой частоте. Эти результаты и соответствующие численные данные по формуле (9) приведены в табл. 2. Расхождение численных значений в широком диапазоне рабочих частот фильтра – менее 1%.

Таблица 2. Сравнение результатов расчета АЧХ в частотной (с помощью системы *SCAD*) и временной (*t*-анализ) области

$f$ , кГц	0,1	10,0	17,3	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0
Частотная область	5.5986	6.4111	5.7827	4.8025	2.1358	1.1278	0.6881	0.4592
<i>t</i> -анализ, <i>Multisim</i>	5.5991	6.4162	5.7895	4.8076	2.1361	1.1279	0.6814	0.4577

**Выводы.** 1. Предложены *z*-схемы замещения типовых элементов с ПК, учитывающие сопротивления ключей. Схемы позволяют провести частотный анализ цепей с ПК, переключательные элементы которых развязаны между собой, например, с помощью операционных усилителей, непосредственно – без анализа во временной области. 2. Применение предложенных *z*-схем в составе системы *SCAD* позволяет получить символьные или численно-символьные передаточные функции фильтров на ПК с учетом сопротивлений ключей. Такие функции требуются для исследования устойчивости и оценки влияния параметров элементов, в том числе паразитных, на частотные характеристики.

## Литература

1. Гауси М., Лакер К. Активные фильтры с переключаемыми конденсаторами. – М.: Радио и связь, 1986. – 168 с.
2. Аллен Ф., Санчес–Синенсио Э. Электронные схемы с переключаемыми конденсаторами. – М.: Радио и связь, 1989. – 576 с.
3. Миронов В.Г. Основы проектирования дискретно–аналоговых систем обработки сигналов // Электричество. – 2003. – №10. – С. 37–48.
4. Мулявка Я. Схемы на операционных усилителях с переключаемыми конденсаторами. – М.: Мир, 1992. – 416 с.
5. Коротков А.С., Курганов С.А., Филаретов В.В. Схемно–алгебраический анализ электрических схем с переключаемыми конденсаторами в частотной области // Схемно–алгебраические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Труды международной конференции КЛИН–2006. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 115–127.
6. Березуев Р.И., Курганов С.А., Филаретов В.В., Шеин Д.В. SCAD – система символьного анализа и диагностики линейных электронных цепей // Схемно–топологические модели активных электрических цепей: синтез и анализ: Труды международной конференции КЛИН–2005. – Ульяновск: УлГТУ, 2005. – Т. 3. – С. 3–11.
7. Хернитер М. Е. *Multisim*. Современная система компьютерного моделирования и анализа схем электронных устройств. – М.: ДМК-пресс, 2006. – 488 с.

**Белобров Евгений Викторович** – студент РТФ УлГТУ. e-mail: [belobrov@bk.ru](mailto:belobrov@bk.ru).

**Курганов Сергей Александрович** – д.т.н., профессор кафедры электроснабжения УлГТУ. 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32, УлГТУ; служебный тел. 77-81-05. e-mail: [sak@ulstu.ru](mailto:sak@ulstu.ru).